بسم الله الرحمن الرحیم

تحلیل سازه

تحلیل سازه

۱- درجه نامعینی ۱ سوال

۲- دیاگرام نیروهای داخلی < دیاگرام برش / دیاگرام لنگر

۳- تحلیل خرپاهای نامعین ۱ سوال

۴- خط تاثیر سازه‌های معین (

۵- محاسبه تغییر شکلها

۶- تحلیل سازه نامعین (به روش شیب افت)

۷- تحلیل تقریبی سازه‌ها

تحلیل سازه ، مجهولات
- نیروهای داخلی
  - برشی
  - خمشی
  - محوری
- تغییر مکانها
  - Δ
  - θ

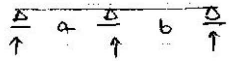
ابزار ← معادلات   با توجه به معادلات مجهولات را بدست می آوریم

معادلات ۱) معادلات تعادل استاتیکی

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0$$

برای سازه دو معادله تعادل داریم ←

شکل ۱



$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M = 0$$
$$\cancel{\Sigma F_x}$$

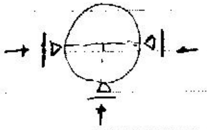
پس در موارد خاص تعداد معادلات تعادل کمتر هم می شود

در شرایط زیر تعداد معادلات تعادل کمتر از ۳ می باشد

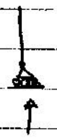
الف) وقتی که تمام نیروها با یکدیگر موازی باشند شکل ۱

ΣF_x حذف می شود

ب) اگر نیروها همدیگر را در یک نقطه قطع کنند در این حالت معادله تعادل لنگر حذف می شود

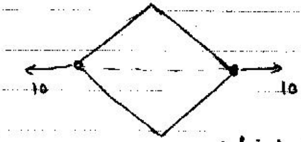


$$\cancel{\Sigma M}$$



ت) وقتی که تمام نیروها روی یک خط قرار گرفته باشند که در این حالت فقط معادله تعادلی که روی آن خط نوشته می شود باقی می ماند و دو معادله دیگر حذف می شود

$$\Sigma F_y = 0$$
$$\cancel{\Sigma F_x}$$
$$\cancel{\Sigma M}$$



* تذکر: این شکل اصلاً معادله تعادل ندارد چون رابطه‌ای بین معلوم و مجهول نداریم اگر یک مجهول داشت معادله را داشتیم ولی در حال حاضر مجهول نداریم

* تمام سازه‌هایی که معادلات آنها کمتر از ۳ تا می باشد معمولاً ناپایدار می شوند ولی در شرایطی که ما بارها را می چینیم در بارگذاری خاص، پایدار می شوند

↓

* با بررسی نمونه‌های فوق مشخص می شود که این سازه‌ها همگی ناپایدار هستند که تحت اثر بارگذاری خاص پایدار خواهند شد که اصطلاحاً به آنها پایدار مشروط می گوییم

۱۶ چهارشنبه

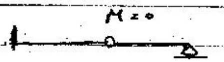
Wed. 6 . August

مرداد ۱۳۸۷

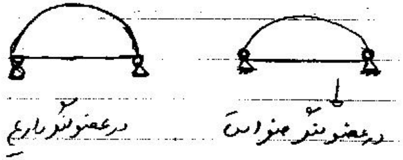
۴ شعبان ۱۴۲۹

معادلات شرطی یا کمکی

۲)

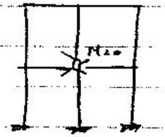


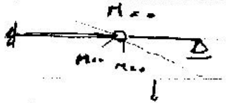
مربوط به مفاصلی که ما از پیش نیروی داخلی آنها را می‌دانیم



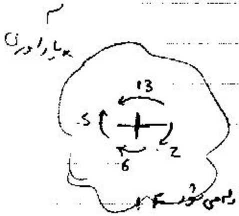
الف) مفاصل میانی :

درصورتی که به یک مفصل میانی n عضو متصل باشد ما n-1 معادله شرطی داریم



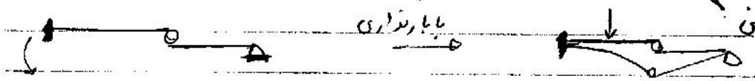


دو انتهای عضوی که به مفصل می‌رسد لنگر صفر می‌باشد



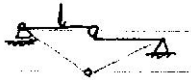
۲ معادله شرطی F و M در طول اتصال زیرا فقط ۱ معادله می‌نویسیم

ب) غلتک میانی



تا یک قید افقی را نبندیم ناپایداری را حفظ کند

پس ناپایدار است



پس سازه‌ای که تغییر مکان دارد ناپایدار است

این شکل ناپایدار می‌باشد

جابجایی مقید کرده باشد مشابه آن [illegible]

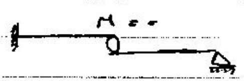
۱۷ پنجشنبه

Thu. 7 . August

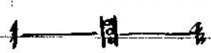
مرداد ۱۳۸۷

۵ شعبان ۱۴۲۹

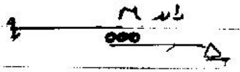
$\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = 0$



$\Sigma F_x = 0$



جمع‌بندی معادلات → معادلات تعادل < $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ ، $\Sigma M_z = 0$

→ شرطی // کمکی — الف) مفاصل میانی : n عضو متصل باشد n-1 معادله شرطی داریم

— ب) غلتک میانی ۲ معادله شرطی F و M

ولادت حضرت امام زین‌العابدین علیه‌السلام (۳۸ هـ . ق) / روز خبرنگار

~~در طول اتصال زیرا فقط ۱ معادله می‌نوشتیم ۲~~

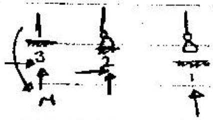
۱۸ جمعه

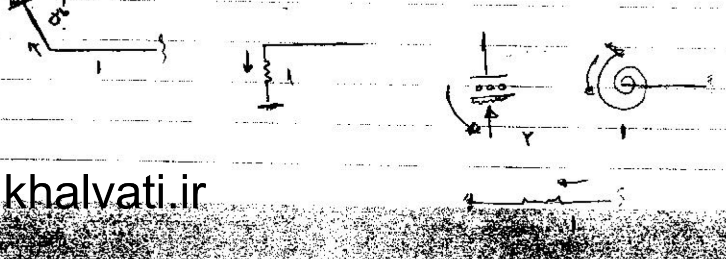
Fri. 8 . August

مرداد ۱۳۸۷

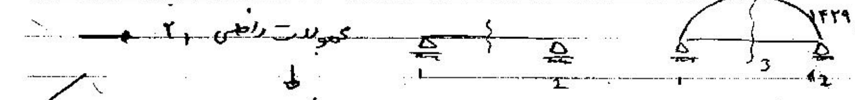
۶ شعبان ۱۴۲۹

عکس‌العمل { تکیه‌گاهی ۱) → کمولات





هرگاه بسته ای در داخل سیستم سازه ای را بسته باشیم
به ازای آن 3 مجهول اضافی ایجاد می کند



مجهولات داخلی ۲ ، ۱

هرگاه در بسته ۳ مجهول ایجاد می کند

معادله : $3+3=6$

مجهول $3+3=6$

معین

$3+3=$

$3+6$

3

دستگاه ها :

1 معادلات = مجهولات سه دستگاه جواب دارد سه سازه معین

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$$

2 معادلات < مجهولات سه دستگاه بی نهایت جواب دارد سه سازه نامعین

$$\begin{cases} 2x+4y=9 \end{cases}$$

تغییر شکل $\Delta = 0$

3 معادلات > مجهولات سه دستگاه جواب ندارد سه سازه ناپایدار

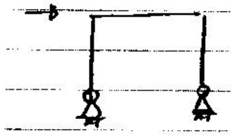
$$\begin{cases} 2x=6 \\ 3x=10 \end{cases}$$

یعنی معادلات تعادل ارضا نشده است

فقط ناپایدار ای هندسی
ممکن است سازه ناپایدار هندسی باشد
ولی مجهولات از معادلات کم نباشند

مفصل کامل

مثال) درخصوص پایداری و ناپایداری هر یک از سازه های زیر درجه نامعینی آنها اظهار نظر کنید



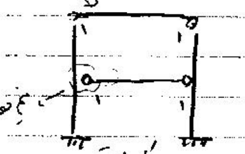
تغییر مکان افقی دارد در حالی که بار داریم این ناپایدار است

اگر بسته نداریم ولی تغییر شکل داریم پس ناپایداری هست

ج) ٤

ع) ۳ + ۱
شرطی

۱ درجه نامعین



$|o—$

$2-1=1$
$n-1$

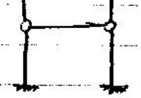
ناپایدار چون پای ستونها بی بار است
تغییری که در پای ستون ایجاد می شود
عملا هیچ کمی دارند

بار بسته

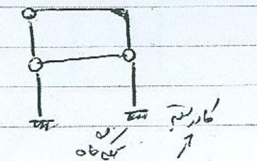
ج) $6 + \boxed{3} = 9$

ع) $3+4=7$

2 نامعین



اگر بار جانبی به کار بالا اعمال شود
چون هر چهار طرف آن مفصل
است پس می افتد پس ناپایدار است
برای اینکه ناپایدار به پایدار تبدیل شود
می توان یکی از اتصالات را گیردار [illegible]
[illegible]

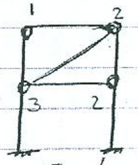


سازه پایدار

ج) 6 + ③ = 9

ع) 3 + 5 = 8

۱ درجه نامعین

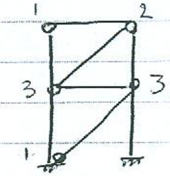


سازه پایدار

ج) 6 + ③ + ③ = 12

ع) 8 + 3 = 11

۱ درجه نامعین



۱ بادبند ۱ نیروی محوری دارد

اعضای دوسر مفصل فقط یک نیروی محوری دارند

مثلی که بادبند نداشت ۱ درجه نامعین بود حالا که بادبند دارد و بادبند فقط یک نیروی محوری دارد پس می‌شود

۲ درجه نامعین

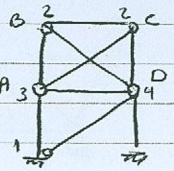
روش دوم

ج) 6 + 3 + 3 + 3 = 15

ع) 3 + ⑩ = 13

شرط

2 درجه نامعین



محل تقاطع بادبندها اتصال ندارد

BCD
ABD
ABC

حلقه‌های بسته

ج) 6 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18

ع) = 3 + 12 = 15

3

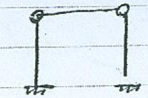
معمولاً بادبند

اعضای قطری را حذف می‌کنیم درجه نامعینی را ت
می‌کنیم بعد

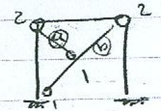
راه حل ساده‌تر در مواردی که اعضای قطری به صورت ضربدری در دهانه‌ها قرار گرفته‌اند و در نقطه میانی اتصال سازه‌ای وجود ندارد برای شمارش درجه نامعینی یکی از اعضای قطری را حذف نموده درجه نامعینی را محاسبه می‌کنیم و در انتها به تعداد اعضای قطری حذف شده به درجات نامعینی اضافه می‌نماییم

پس در این مثال با حذف یک عضو قطری تا ۲ درجه نامعین داریم و ۱ درجه هم به دلیل عضو قطری ~~نامعین~~

پس 3 درجه نامعین می‌شود



سازه ناپایدار



عضو قطری (a) یک مجهول به ما می‌دهد

عضو قطری (b) فقط یک نیروی محوری ندارد

به شرطی که وسط آن یک نیرو دارد

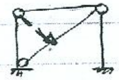
که باعث برش و خمش می‌شود

کلاف بسته

ج) $6 + ⑥ = 12$

ع) $③ + ⑥ = 9$

تقارن ۲ تکیه



3 درجه نامعین

مثال: اگر یک قاب خمشی n طبقه و k دهانه‌ای، ی دهانه‌ها را بادبند ضربدری دوسرمفصل در تمام طبقات اجرا کرده‌ایم درجه نامعینی آن را حساب کنید

عکس‌العمل تکیه‌گاهی — کلاف بسته — بادبند

ج) $3(k+1) + 3(n-1)k + 2ns = \cancel{3}k + 3 + 3nk - \cancel{3}k + 2ns =$

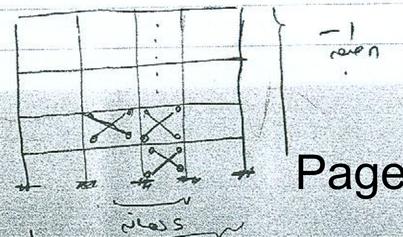
هر دهانه ۲ مجهول — n طبقه — s دهانه

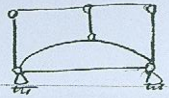
ع) 3

$$\cancel{3} + 3nk + 2ns - \cancel{3} = 3nk + 2ns$$

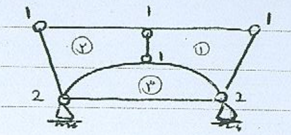
$* (n-1)$ طبقه

K دهانه





ناپایدار ←



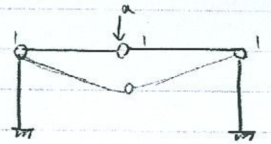
کلاف بسته ← ①, ②, ③

پایدار است چون متقارن است و اعضا از یک نقطه رد نمی‌شوند

ج: $4 + 3 + 3 + 3 = 13$

ع) $3 + 8 = 11$ .4

2 درجه نامعین

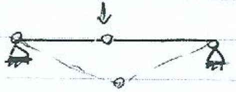


وقتی بار نقطه‌ای (a) بر آن اعمال می‌شود از وسط می‌شکند پس ناپایدار است

(راه دوم ج) $= 6$

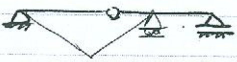
ع) $= 3 + 3 = 6$

0



ناپایدار است

ناپایدار آنی



ناپایدار

شرایط نیروها به گونه‌ای است که سازه نامعین می‌شود

شرایط ناپایداری: ← ۱) ناپایداری استاتیکی (نیرویی)

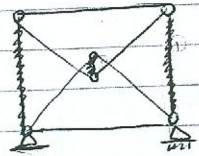
الف) نیروهای موازی

ب) نیروهای متقارب

۲) ناپایداری هندسی ← الف) سه مفصل در یک امتداد

ب) قاب‌های با اتصالات مفصلی در تمام گوشه‌ها

مثال ۱

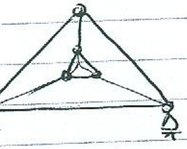


ناپایدار است به دلیل شماره ۱

حالت الف ۱) ۳ عضو موازی

شکل روبرو است

ها سوار خورده

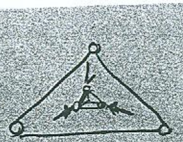


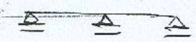
مثلث کوچک وسط می‌چرخد

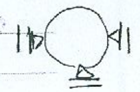
چون متساوی‌الاضلاع است

نیروها متقارب است

از یک نقطه رد می‌شوند

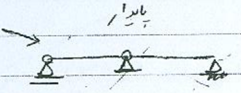


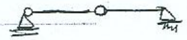




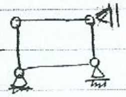
چون تکیه‌گاه در وسط هست و حرکت مقید شده پس

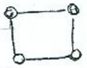
دیگر ناپایدار نیست

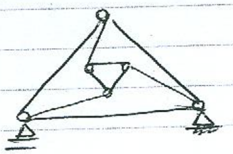




← پایدار است بدلیل تکیه‌گاه‌هایی که دارد

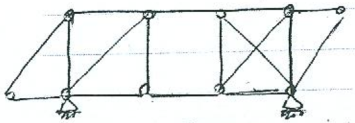




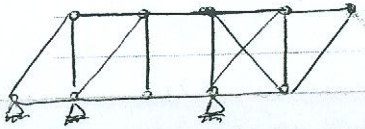


پایدار

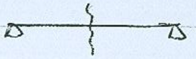
چون کاری به نوع آن مفصل است می‌تواند حرکت کند



ناپایدار برای پایدار شدن کافی است یک عضو قطری یا ۲ تکیه‌گاه گذاشت

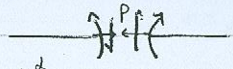


دیاگرام نیروهای داخلی:



در داخل مقطع نیروهای داخلی

در اثر بارگذاری خارجی ایجاد می‌شود



نشان دهنده علامت مثبت نیروهای داخلی

علامت گشتاورهای داخلی → تار پایین کشش

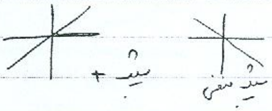
تار بالا فشار

علامت برش: سمت چپ پایین سمت راست بالا

علامت محوری: همواره کشش

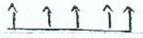
در بارگذاری‌های مختلف به دیاگرام‌های مختلف می‌رسیم

باید یکسری قراردادها چک شود مثل قرارداد شیب:

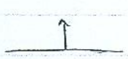


قرارداد بار خارجی:

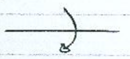
بار گسترده مثبت



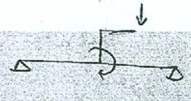
بار متمرکز مثبت



لنگر متمرکز مثبت



مثال ۱



لنگر خارجی مثبت است

معادلات تعادل دیفرانسیلی

1) $\frac{dV}{dx} = q(x)$

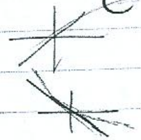
2) $\frac{dM}{dx} = V(x)$

نتایجی که از معادلات بالا می‌گیریم به ترتیب زیر است

۱) شیب دیاگرام برش در هر نقطه برابر است با بارگسترده در همان نقطه

۲) شیب دیاگرام گشتاور در هر نقطه برابر است با مقدار برش در آن مقطع

یعنی اگر یک جا برش مثبت باشد شیب دیاگرام گشتاور مثبت باشد



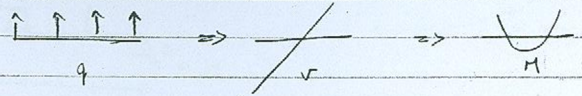
منفی باشد " منفی "

۳) در مقطعی که برش تغییر علامت میدهد (صفر شود) گشتاور ماکزیمم یا مینیمم خواهد شد یعنی نقطه اکسترمم داریم

۱۴

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} \underbrace{\frac{d^2M}{dx^2}}_{\text{تقعر دیاگرام گشتاور}} = q(x)$$

مثال)

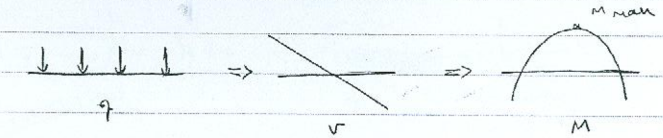


بارگسترده رو به بالا مثبت => تقعر دیاگرام گشتاور مثبت

وقتی برش مثبت => شیب دیاگرام گشتاور مثبت

منفی " => منفی "

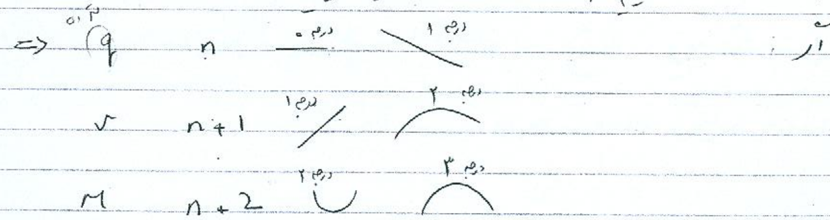
شیب صفر است => گشتاور ماکزیمم داریم



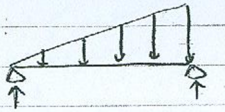
روز جهانی مسجد /

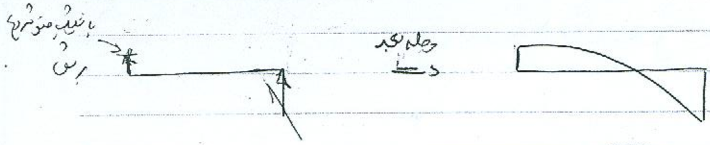
۱۵

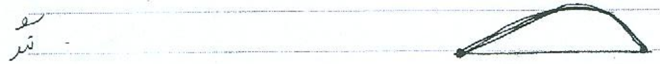
از بارگسترده انتگرال می‌گیریم برش می‌شود یک انتگرال دیگر می‌گیریم گشتاور می‌شود



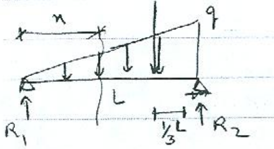
مثال ۱ دیاگرام برش و خمش تیر را رسم کنید.





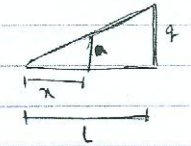


مثال ۲ نقطه‌ای که خمش ماکزیمم است محاسبه کنید؟ جایی که برش صفر است خمش ماکزیمم است



$$R_1 \cdot L = \frac{q \cdot L}{2} \times \boxed{\overset{\text{بازو}}{\frac{L}{3}}} \rightarrow \boxed{R_1 = \frac{qL}{6}}$$

برش صفر => $\frac{qL}{6}$ <= x را می‌یابیم که مساحت مثلث کوچک برابر $\frac{qL}{6}$ شود =>



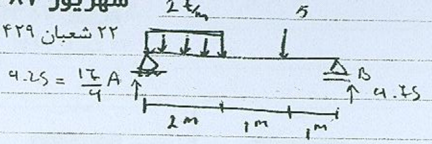
$\alpha = \frac{x}{L} q$

$$\boxed{\begin{matrix} q & L \\ \alpha & x \\ \alpha = \frac{xq}{L} & \end{matrix}}$$

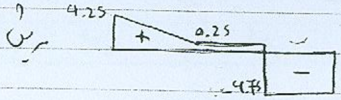
$$\frac{1}{2} q \frac{x}{L} x = \frac{qL}{6}$$

$$\boxed{x^2 = \frac{L^2}{3} \longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} L}$$

دیاگرام برش و خمش رسم شود؟

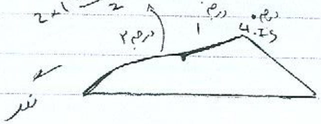


$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B \times 4 - 5 \times 3 - 4 \times 1 = 0$$
$$\Rightarrow R_B = 19/4$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad R_A + \frac{19}{4} - \frac{20}{4} - \frac{16}{4} = \frac{17}{4}$$



رابطه ۱ $\frac{dV}{dx} = q \longrightarrow \int_1^2 dV = \int_1^2 q\,dx \longrightarrow \underbrace{\overbrace{V_2 - V_1}^{\text{تغییرات برش}}}_{4}$ = سطح زیر بارگسترده در منطقه ۱ و ۲

$2 \times \left(\frac{4.25 + 0.25}{2}\right) = 4.5$



بارگسترده رو به پایین پس تقعر هم

رو به پایین باید باشد 4.25 باید شروع

شود یعنی از شیب 4.25 شروع و به شیب 0.25 می‌رسد بعد باید 0.25 — آن اضافه شود و بعد باید 4.75 کم شود

تغییرات برش بین دو مقطع برابر است با سطح زیر بارگسترده بین آن دو مقطع

با در نظر گرفتن علامت جبری ← رابطه ۱

q پایین = −

q بالا = +

تغییرات خمش بین دو مقطع برابر است با سطح زیر دیاگرام برش بین آن دو مقطع

با در نظر گرفتن علامت جبری

[illegible]

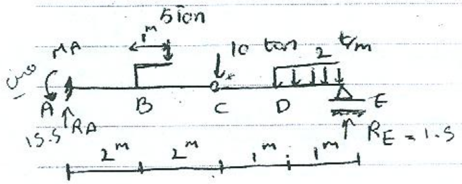
هم جهت و هم مقدار با بار

بار متمرکز در دیاگرام برش یک جهش ایجاد می‌کند در دیاگرام لنگر شکستگی ایجاد می‌کند چون در یک مقطع دو برش مختلف داریم

تغییر شیب

بار متمرکز در دیاگرام برش یک جهش هم جهت و هم مقدار با بار ایجاد می‌کند
در دیاگرام لنگر یک نقطه تغییر شیب یا شکستگی ایجاد خواهد شد

مثال ۱) تیر حول مفصل *


5 ton
1m
MA
10 ton
2 t/m
A
B
C
D
E
RA
15.5
RE = 1.5
2m
2m
1m
1m

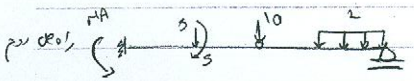
حول نقطه C لنگر صفر می‌باشد,
به این معنی که از C از هم جدا شده‌اند

$$\boxed{R_E \times 2 = 2 \times 1.5 \to R_E = 1.5}$$

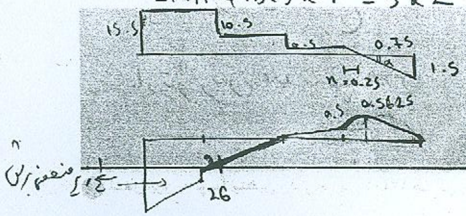
$$\Sigma F_y = 5 + 10 + 2 - 1.5 = 0 \to R_A = 15.5$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_C \Rightarrow -M_A + 15.5 \times 4 - 5 \times 1 = 0 \to M_A = 57\ t.m$$

راه حل دوم

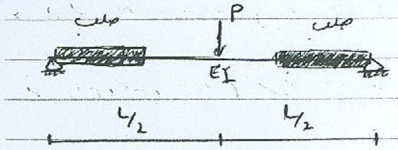


$$-MA + 15.5 \times 4 - 5 \times 2 + 5 = 0 \to MA = 57\ t.m$$


15.5
10.5
0.5
0.75
1.5
x = 0.25
0.5
0.5625
26

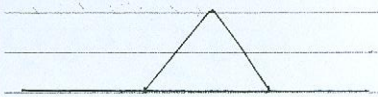
راه حل ۲) $= \tan\alpha = q = \frac{v}{x} \Rightarrow x = \frac{v}{q} \to x = \frac{0.5}{2} = 0$

دیاگرام نیروهای داخلی:

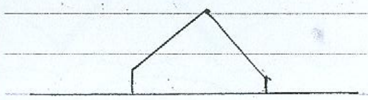

صلب
P
صلب
EI
L/2
L/2

چون سازه روبرو متقارن می‌باشد بنابراین پخش نیروها بر اساس سختی نمی‌باشد

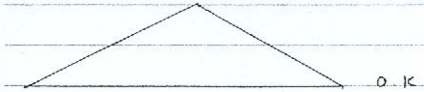
۱)



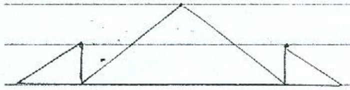
۲)

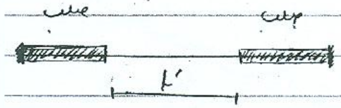


۳)



٤)





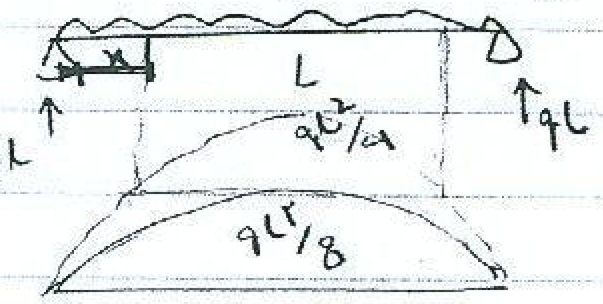
چون سازه روبرو نامتقارن می‌باشد بنابراین پخش نیروها بر اساس سختی می‌باشد

A2

* در یک تیر دو سر مفصل به طول L که تحت اثر بار گسترده q قرار گرفته است طراحی بر اساس خمش انجام گرفته اگر شدت بار روی تیر ۲ برابر بشود چند درصد از طول تیر را باید تقویت کرد

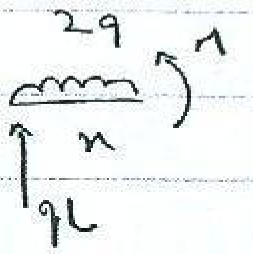
if 2q $\to \frac{qL^2}{4} = M$

q $\to M = \frac{qL^2}{8}$



الف) ۳۰٪ ب) ۹۰٪

ج) ۵۰٪ د) ۷۰٪ ✓



$$M = qL\cdot x - 2q\cdot x\cdot \frac{x}{2}$$

$$\frac{qL^2}{8} = qLx - 2q\frac{x^2}{2} \longrightarrow Lx - x^2 = \frac{L^2}{8}$$

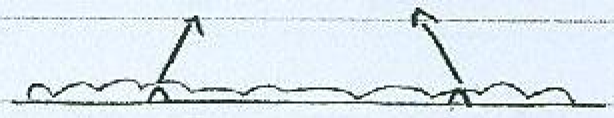
$$8x^2 - 8Lx + L^2 = 0$$

$$x = \frac{8L \mp \sqrt{64L^2 - 32L^2}}{16}$$

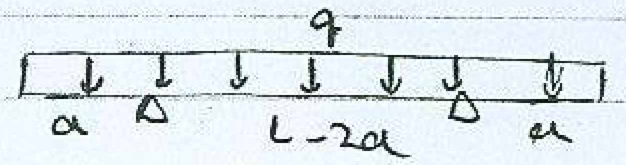
$$x = \frac{8L \mp 4\sqrt{2}L}{16} \begin{cases} x_2 = \frac{13.6}{16}L \\ x_1 = \frac{2.4}{16}x \end{cases}$$

$$x_2 - x_1 = 0.7L$$

مثال: برای جابجایی یک تیر بتنی در کارگاه از دو قلاب استفاده می‌شود فاصله قلاب‌ها را از دو انتهای تیر طوری مناسب کنید که تنش حداکثر ایجاد شده در تیر به حداقل خود برسد



تنش منفی روی تکیه‌گاه

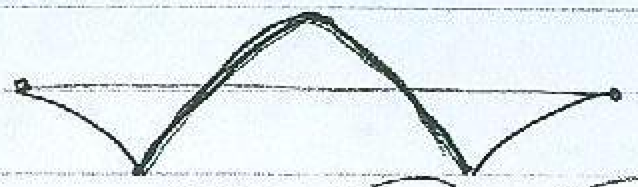


الف) $\frac{1}{3}L$

ب) $0.15L$

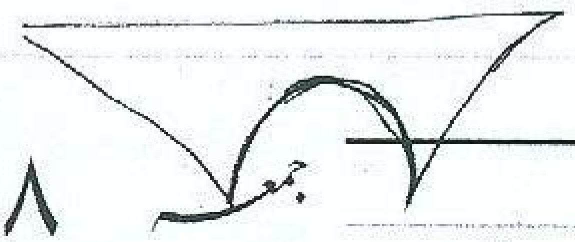
ج) $0.2L$ ✓

د) $0.3L$



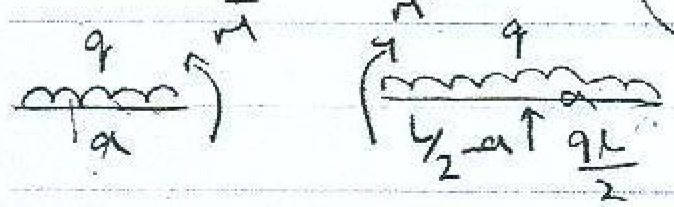
اگر تکیه‌گاه‌ها خیلی به هم نزدیک شوند

می‌خواهیم تنش ماکزیمم به حداقل برسد



اگر تکیه‌گاه‌ها خیلی از هم دور شوند

پس تنش مثبت و منفی که در این تیر ایجاد می‌شوند باید با هم برابر باشند



$$q\times\frac{a^2}{2} = q\cdot a\cdot \frac{a}{2} = M^-$$

$$M^+ = \frac{qL}{2}\left(\frac{L}{2} - a\right) - \frac{qL}{2}\times\frac{L}{4}$$

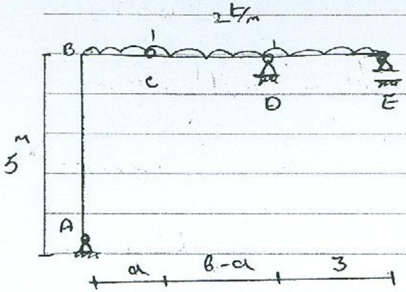
$$= \frac{qL^2}{4} - \frac{qLa}{2} - \frac{qL^2}{8} = \frac{qL^2}{8} - \frac{qLa}{2}$$

$$M^+ = |M^-|$$

$$\frac{qL^2}{8} - \frac{qLa}{2} = \frac{qa^2}{2} \longrightarrow 4a^2 + 4aL - L^2 = 0 \longrightarrow a = \frac{-4L \mp \sqrt{16L^2 + 16L^2}}{8}$$

مثال) طول a را طوری بدست آورید که لنگر مثبت و منفی در مقطع BCD برابر شود

یک سازه پایدار می باشد

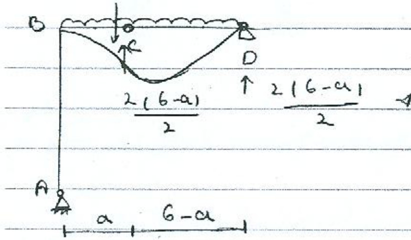


ع1 = 3 + 2 = 5

ج1 = 5

$$\frac{\ }{0}$$

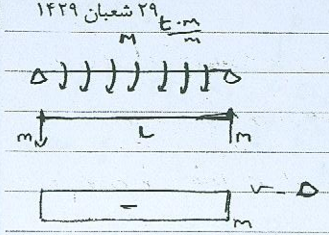
سازه معین



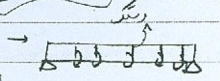
لنگر مثبت و منفی را باید مساوی قرار دهیم

$$\underbrace{\frac{2(6-a)^2}{8}}_{M^+} = \underbrace{2\times a\times\frac{a}{2} + \overbrace{\frac{2(6-a)}{2}}^{\text{برش در مفصل c}}\times a}_{M^-}$$

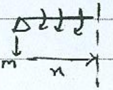
مثال) در تیر زیر دیاگرام برش و لنگر را رسم نمایید



در واقع مثل این است که



یک مقطع به فاصله x می زنیم



$M(x) = 0$ → لنگر در هر مقطع در این تیر صفر می باشد

$M = 0$ M-D

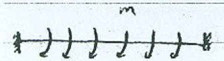
پس دیاگرام لنگر ← برش + شدت لنگری که روی آن می باشد

مثلاً وقتی بار گسترده q داشتیم → $\frac{dM}{dx} = V$

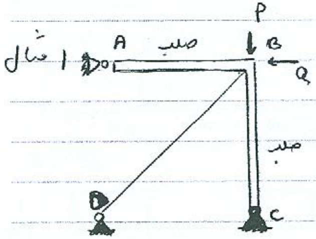
حالا اگر لنگر خمشی گسترده را داشته باشیم → $\frac{dM}{dx} = V + m(x)$

در این مثال $\frac{dM}{dx} = -m(x) + m(x)$

ا مثال



تیرهای سر بار روی تکیه گاه مفصلی در آن
اثری ایجاد نمی شود بین از تکیه گاه
هم عوض شود مثلاً سر بار شود
باز هم نیرو در آن صفر است



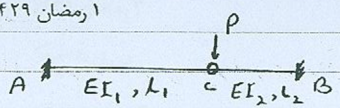
مثال: قطعه AB و BC هم محوری و هم خمشی صلب است
نیروی محوری BD را محاسبه کنید

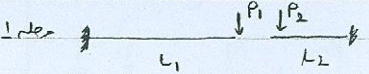
چون صلب است

هیچ تغییر شکلی در این دو نقطه ایجاد نمی شود
بین B و D هیچ تغییر طولی ندارند

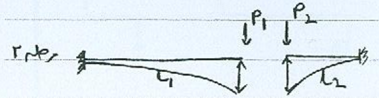
چون دو انتهای قطعه BD نسبت به همدیگر هیچگونه تغییر مکانی نمی دهند (به دلیل اینکه دو قطعه دیگر کاملاً صلب هستند) نیروی محوری در این عضو صفر خواهد بود. به عبارت دیگر سازه نامعین بر نیرو قرار است به نسبت سختی توزیع شود اجزائی که سختی ∞ دارند تمام نیروها را جذب نموده و سهم بقیه صفر می شود

مثال: سهم هر یک از دو قطعه AC و BC از نیروی متمرکز P که به مفصل اعمال می شود را محاسبه کنید





$$P_1 + P_2 = P$$



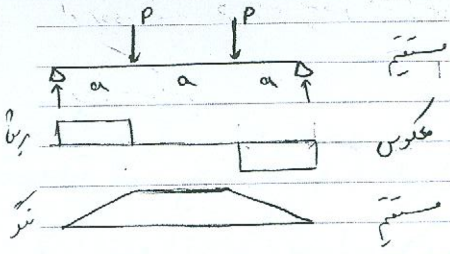
$$\Delta_1 = \frac{P_1 L_1^3}{3EI_1} = \frac{P_2 L_2^3}{3EI_2} = \Delta_2$$

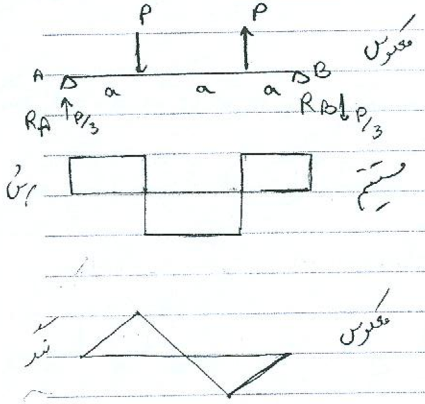
$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^3 \cdot \frac{EI_1}{EI_2}$$

مثال: نسبت لنگرهای مثال بالا چگونه است؟ (با فرض اینکه EI ها مساوی هستند)

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{P_1 \cdot L_1}{P_2 \cdot L_2} = \underbrace{\boxed{\frac{P_1}{P_2}}}_{\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^3} \cdot \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2$$

مثال ۱) در رو تیر زیر دیاگرامهای برش و لنگر را رسم کنید


P
P
a
a
a
مستقیم
برش
معکوس
لنگر
مستقیم


P
P
معکوس
A
B
a
a
a
R_A
$P/3$
R_B
$P/3$
برش
مستقیم
لنگر
معکوس

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A + P + P + R_B = 0$

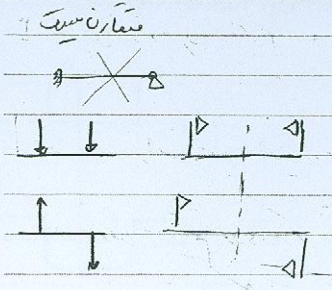
$R_A = -R_B$

$\Sigma M_B = 0$

$R_A \times 3a - P \times 2a + P \times a = 0$

$R_a = \frac{P}{3}$

اصول تقارن :


متقارن نیست

۱- سازه متقارن است

۲- بارگذاری
تقارن مستقیم و محوری ۱
تقارن معکوس و مرکزی ۱

در یک سازه متقارن اگر بارگذاری تقارن مستقیم داشته باشد دیاگرام لنگر نیز تقارن مستقیم خواهد داشت و برش معکوس

شهادت آیت ا... قدوسی و سرتیپ وحید دستجردی (۱۳۶۰ هـ. ش) ا

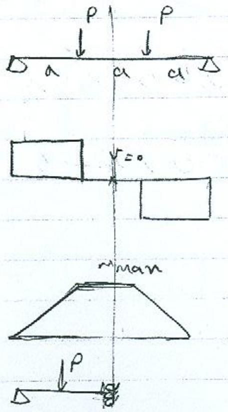
اگر بارگذاری تقارن معکوس داشته باشد لنگر نیز تقارن معکوس داشته و برش مستقیم

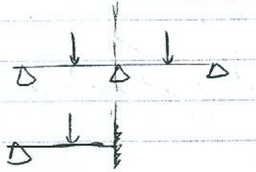
۳ نتایجی که از تقارن می‌گیریم ← اصول استاتیکی و هندسی در تقارن :

الف) شرایط استاتیکی در تقارن :

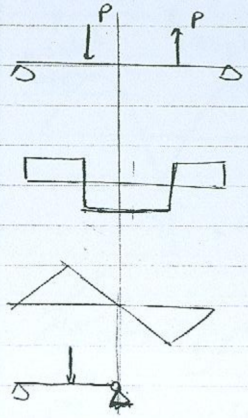
در تقارن مستقیم روی مرکز تقارن برش برابر با صفر و لنگر ماکزیمم ، و در تقارن معکوس روی مرکز تقارن لنگر برابر با صفر خواهد بود که اصطلاحاً به آن نقطه عطف می‌گویند

ب) در سازه نیمه از یک سازه با تقارن مستقیم روی محور تقارن تکیه‌گاه گیردار غلتکی در نظر گرفته می‌شود مگر آنکه در سازه اصلی در آن نقطه یک تکیه‌گاه داشته باشیم که تکیه‌گاه گیردار کامل جایگزین آن خواهد شد





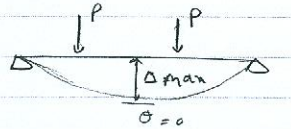
ج) در بارگذاری با تقارن معکوس روی مرکز تقارن تکیه‌گاه مفصلی شود و سازه نیمه آن باید به صورت زیر باشد

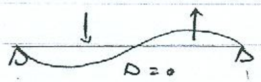


شرایط هندسی تقارن

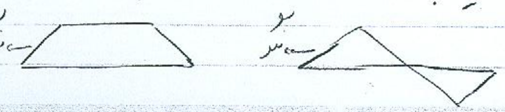
در تقارن مستقیم روی مرکز تقارن شیب تغییر شکل صفر و تغییر مکان max خواهد بود

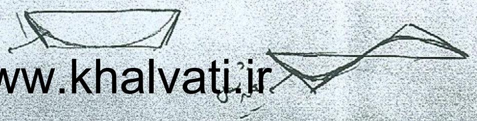
در تقارن معکوس روی مرکز تقارن ، تغییر مکان صفر خواهد بود

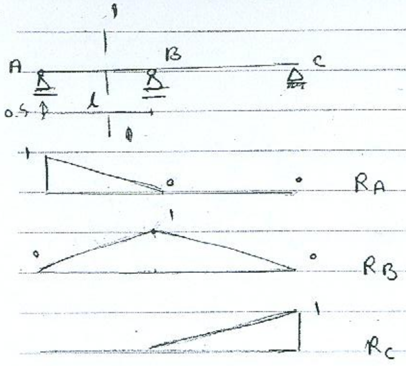




توضیح : اگر دیاگرام لنگر را نسبت به محور افقی قرینه کنیم پس از حذف گوشه‌های تیز به صورت شماتیک منحنی تغییر شکل ارتجاعی تیر به دست خواهد آمد






1
A
B
C
0.5
l
1
1
0
0
RA
1
0
0
RB
1
Rc

مثال ۱

RA

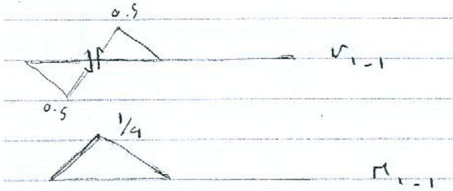
RB

Rc

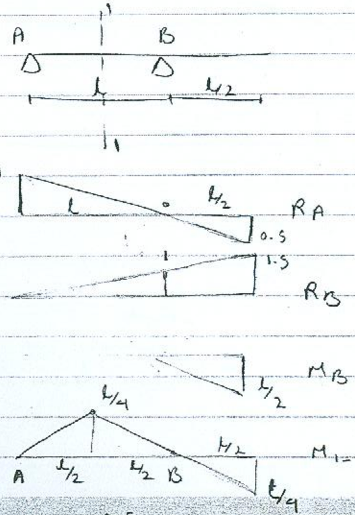
V_{1-1}

M_{1-1}

Rc را از جمع هم می توان بدست آورد


0.5
0.5
V_{1-1}
1/4
M_{1-1}

اگر بار در قطعه BC باشد در قطعه AB هیچگونه برش نداریم


1
A
B
l
l/2
1
1
l
0
l/2
RA
0.5
1.5
RB
MB
l/2
l/4
A
l/2
l/2
B
l/2
M_{1-1}
l/4

مثال ۱

R A

RB

MB

M_{1-1}

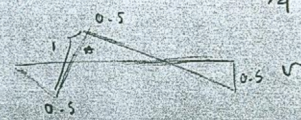
V_{1-1}

VB — VBL, VBR

در تکیه گاه تغییر شکل نمی دهد پس دو قطعه جابجا می شود

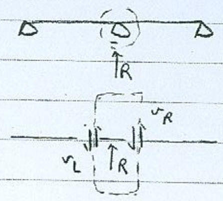
از سمت منفی صرف نظر می کنیم

یعنی اگر بار در AB حرکت کند هیچ نیرویی در B ایجاد نمی شود چون سمت دیگر آزاد است


0.5
1
0.5
0.5
V_{1-1}

بار در گره نباید MB مقدار ایجاد کند

* گره مادی L و مقطع ۱-۱ در وسط پس 0.5 در بالا و 0.5 در پایین

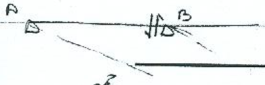


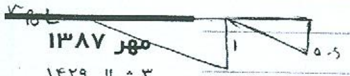
برش در دو طرف تکیه گاه ها با هم فرق می کند

$\Sigma F_y = 0$

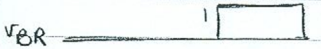
$V_L + R = V_R$

ادامه حل:





اگر L برابر ۱ باشد در L/2 برابر 0.5 می شود



در بار در محدوده AB باشد هیچ برشی در گره ایجاد نمی شود

ولی تا بار در گره می افتد تازه برش داریم

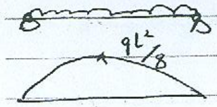
در رسم منحنی های خط تاثیر به این شیوه باید نکات زیر مورد توجه قرار گیرد:

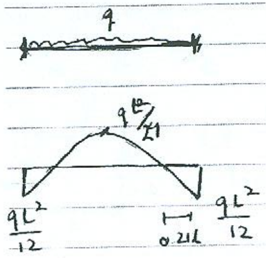
1 اگر در سازه های معین تغییر شکل به صورت منحنی باشد از آن صرف نظر نموده و در آن قطعه خط تاثیر را صفر فرض می کنیم

2008

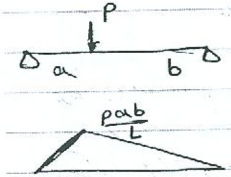
۱۳۸۷

جا بگیره

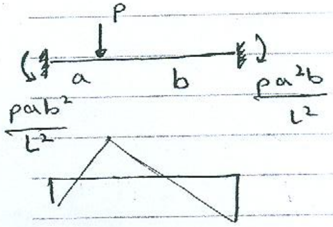



q
qL²/24
qL²/12
0.21L
qL²/12

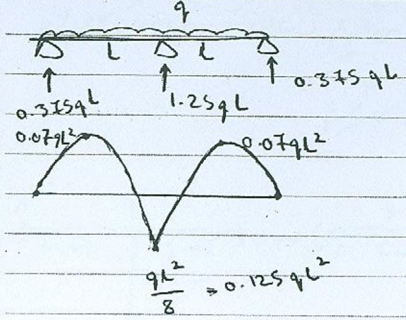
جایی که لنگر صفر می‌شود فاصله‌اش از تکیه‌گاه 0.21L



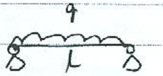
* if $a = b = L/2 \rightarrow \frac{PL}{4}$

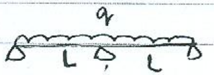

P
a
b
Pab²/L²
Pa²b/L²

۲ دهانه‌های متقارن

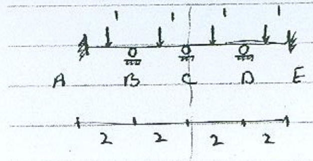

q
L
L
0.375qL
1.25qL
0.375qL
0.07qL²
0.07qL²
qL²/8 = 0.125qL²

از بین دو تیر زیر اگر صرفاً معیار طراحی بر اساس مقاومت را در نظر بگیریم قدر مطلق حداکثر لنگر ایجاد شده یکسان است و مقطع این دو یکسان خواهد بود ولی تیر دو دهانه نامعین به دلیل وقوع بازپخش لنگر می‌تواند برای لنگر کوچکتری طراحی شود





بارها همگی در وسط دهانه‌ها اعمال می‌شوند:

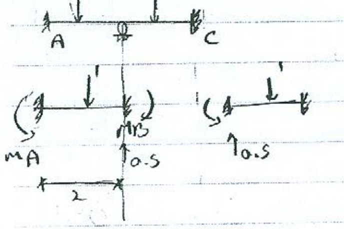


$M_A = ?$

$M_B = ?$

$R_A = ?$

$R_B = ?$



$$M_A = M_B = \frac{1\times2}{8} = \frac{1}{4}\ t.m$$

$$R_A = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$R_B = 2\times0.5 = 1$$

بارگذاری متقارن

در مرکز تقارن یک تکیه‌گاه داریم که سازه

نیمه تبدیل به غلتکی گیردار می‌شود

ولی چون زیر آن تکیه‌گاه داریم

گیردار می‌شود

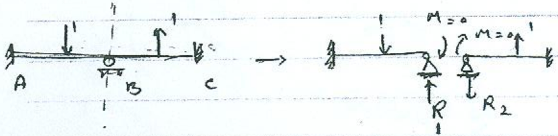
در سازه‌های نیمه‌ی دیگر جزء مشترک نیروهای عکس‌العمل جمع می‌شوند

ولی نیروها همدیگر را خنثی می‌کنند

↓

در این مثال

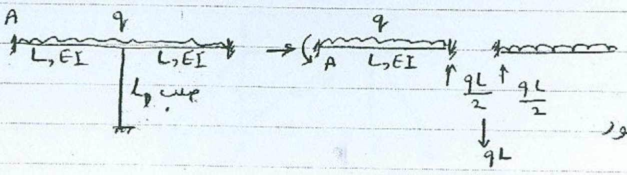
مثال)



$R_1 = R_2$

برای محاسبه نیروهای داخلی روی محور تقارن اگر تقارن مستقیم داشته باشیم برش‌ها با یکدیگر جمع می‌شوند و یکی از نیروها را در نظر می‌گیریم درحالتی که تقارن معکوس دارند نیروها با هم جمع می‌شوند یکی از برش‌ها را در نظر می‌گیریم

مثال)



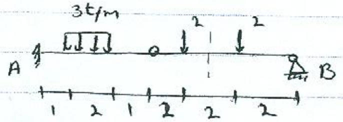
چون ستون داریم تیر گیردار کامل می‌شود

$M_A = ?$ $P_{\text{ستون}} = ?$ $P = qL$

$$M_A = \frac{qL^2}{12}$$

وفات حضرت خدیجه سلام... علیها (۳ سال قبل از هجرت) / روز سینما /

مثال) نیروی برشی در فاصله ۷ متری از تکیه‌گاه A چقدر است؟



مثل یک تیر دو سر مفصل است که تقارن مستقیم دارد پس روی مرکز تقارن برش برابر صفر است

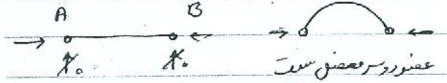
قطعه سمت راست مانند تیر دو سر مفصلی می‌باشد که بارگذاری آن تقارن مستقیم دارد پس برش روی مرکز تقارن صفر خواهد بود

خرپاها :

سازه‌ای که چهار شرط زیر را داشته باشد خرپا گویند

۱ اعضا مستقیم

۲ اتصالات مفصلی



عضو دو سر مفصل است
چون خمش و فشار یا
آن برش در این عضو ایجاد
می‌شود

۳ تغییر شکلها کوچک باشند

۴ نیروها فقط به گره اعمال شوند

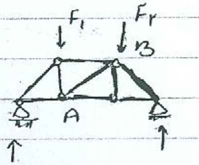
سازه‌ای که یکی از شرطهای بالا را نداشته باشد قاب می‌باشد

برای معین و نامعین خرپاها از همان روابط قبل استفاده می‌کنیم

مناسب‌ترین روش برای تحلیل خرپا

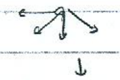
روشهای تحلیل خرپاها : ← گره — هر گره دو معادله دارد $\begin{cases}\Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0\end{cases}$

مقطع ← استفاده از برش → برای المانهای قائم
← استفاده از روش لنگر → برای المانهای افقی



مثال، از روش گره حل کنید ←

از گره‌ای شروع می‌کنیم که دو عضو به آن وصل باشد

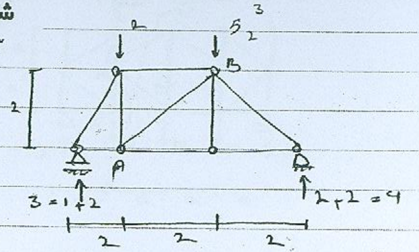


قبلاً با این گره می‌شود
کار کرد

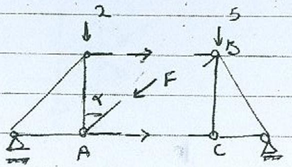
خرپاهایی که به هر گره‌ها حداقل ۳ عضو متصل است به آن خرپاهای [illegible] گویند

روش گره :

مثال نیروی عضو AB از خرپای
زیر چقدر است



یک مقطع می‌زنیم که ۳ تا عضو را قطع کند



F در AB باید به سمت پایین
باشد تا مؤلفه را به ما بدهد

$F . \cos\alpha = 1$

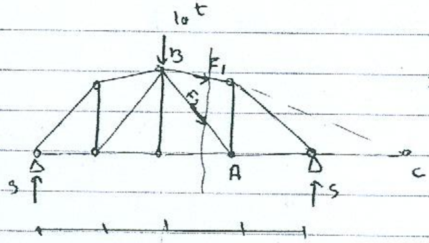
$F = \frac{1}{\cos\alpha}$

۳ رو به بالا ۲ رو به پایین

یک عدد ۱ رو به پایین می‌خواهیم

در مقطع چپ $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 3 \times 4 - 2 \times 2 - F_{AC} \times 2 = 0 \Rightarrow F_{AC} = 4$

در مقطع سمت چپ یک ممان حول نقطه B می‌گیریم



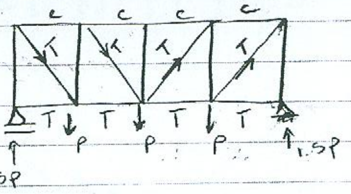
مثال ۱ اول یک لنگر حول A می‌گیریم F_1 بدست می‌آید
و بعد در معادله زیر F_2 بدست می‌آید

$F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 = 5$

روش ۲ : حول نقطه C می‌توانیم لنگر بگیریم

مقطع ① را این‌جا بزنیم بعد

مثال ۱ برای احداث خرپای یک پل دو نوع خرپای زیر پیشنهاد شده است کدامیک از نظر تحمل نیرو مناسب‌تر است ؟

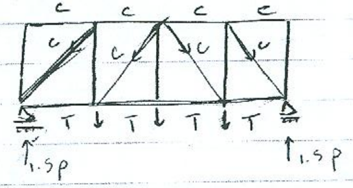

C
C
C
C
T
T
T
T
T
T
T
T
P
P
P
1.5P
1.5P

۱

با این نوع بارگذاری :

بارهای تحتانی پایین کشیده می‌شوند

به خاطر نوع تغییر شکل این تیر


C
C
C
C
C
C
C
C
T
T
T
T
1.5p
1.5p

۲

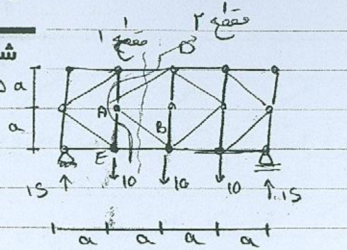
در مقطع ۱

1.5p+ رو به بالا داریم پس 1.5p رو به پایین می‌خواهیم پس رو به پایین باید باشد

در مقطع ۲

1.5p رو به بالا داریم پس 1.5p رو به پایین می‌خواهیم

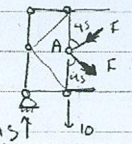
پس عضو ۲ بهتر است


مقطع ۲
مقطع ۱
C
D
A
B
E
a
a
15
10
10
10
15
a
a
a
a

مثال ۱ نیروی عضو AB چقدر است

در گره A ← ΣF_n باید صفر باشد

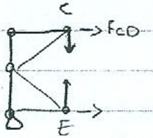
$F_{AB} = ?$


45
F
A
F
45
15
10

مقطع ۱

$$2F\cos 45 = 5 \rightarrow F = \frac{5}{\sqrt{2}} = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$F_{CD} = ?$

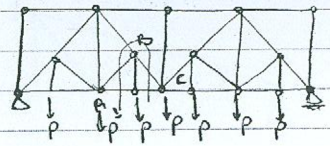


مقطع ۲

$F_{CD} =$ → حول E ممان می‌گیریم

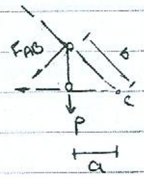
$$F_{CD} \times 2a = 15 \times a \rightarrow F_{CD} = \frac{15}{2} \Rightarrow F_{CD} = 7.5$$

مثال)



خرپای بالتیمور
در خرپای با دهانه وسیع
و ارتفاع بلند استفاده
می شود

$F_{AB} = ?$

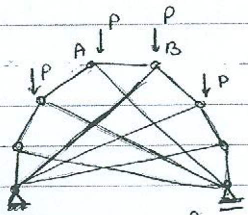


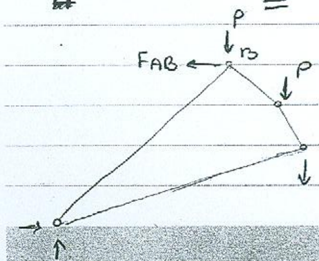
مقطع I معروف به مقطع خرپای بالتیمور می باشد

$\Sigma M_C = 0 \rightarrow P \times a = F_{AB} \times b$

مولفه قائم AB
عمود بر امتداد ce

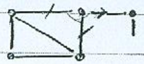
مثال)





اعضا صفر نیرویی : قبل از آنکه خرپا را تحلیل کنیم می توانیم بسیاری اعضا را خارج کنیم

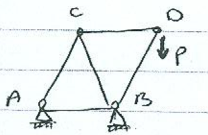
۱ـ اگر دو عضو به گره ای متصل شوند در یک راستا نباشند و نیرویی به آن گره اعمال نشود آن عضوها صفر نیرویی خواهند بود



تبصره : اگر نیرو به این گره اعمال شود و در امتداد یکی از این دو عضو باشد تنها به عضو معادل خود منتقل شده و عضو دیگر صفر نیرویی خواهد بود

۲ـ اگر دو عضو در یک امتداد باشند عضو سومی با هر امتداد دلخواه به آن گره متصل شود مشروط بر آنکه نیرویی به گره اعمال نشود، صفر نیرویی خواهد بود

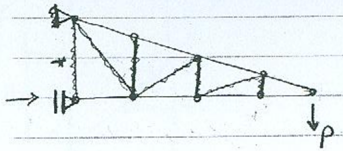
۳ـ مثال : زاویه ها همه ۶۰ می باشند $F_{AB} = ?$



$F_{AB} = 0$

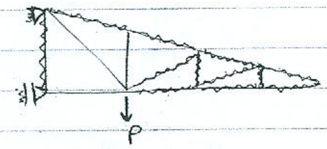
اعضایی که دو سر آنها نسبت به هم هیچگونه جابجایی نداشته باشند را صفر نیرویی گویند

مثال: چند عضو صفر نیرویی وجود دارد



۷ عضو صفر نیرویی

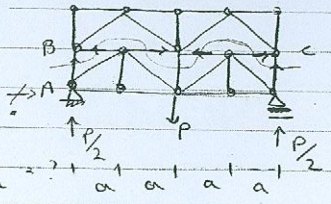
★ یک نکته: این عضو صفر نیرویی نیست چون
حرکت می‌کند وقتی نیرویی که در گره ۲ اثر نیرویی اعمال می‌شود دو نیرو
در یک راستا این عضو عمود بر آنها
صفر است



۱۲ عضو صفر نیرویی

اعضای صفر نیرویی برای حفظ شکل هندسی و وضعیت‌های مختلف بارگذاری می‌گذاریم
از اتلاف درجات نامعینی

اگر حداکثر نیرویی که عضو AB تحمل می‌کند 10 Ton باشد حداکثر نیروی P چقدر خواهد بود؟



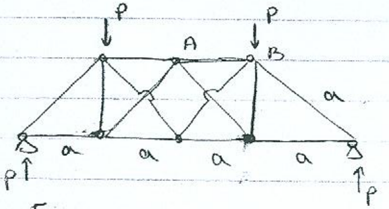
$P_{max} = ?$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow P \times 2a - \frac{P}{2} \times 4a - F_{AB} \times 4a = 0$$

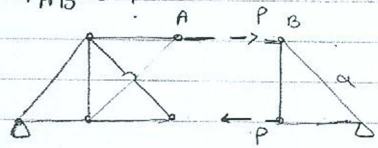
$$\boxed{F_{AB} = 0}$$

پس ما برای P محدودیتی نداریم هر نیرویی می‌خواهیم می‌توانیم بگذاریم

مثال:



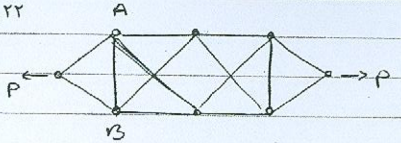
$F_{AB} = ?$



نیرو در نقطه A باید به خاطر تقارن یا هر دو کششی یا هر دو فشاری باشند
ولی در هیچ حالتی برآیند این دو نیرو خنثی نمی‌شوند
پس باید صفر باشد

اعضای قطری این خرپا که به گره A می‌رسند به دلیل تقارن باید نیروهای برابر و هم جهت داشته باشند یا هر دو فشار یا هر دو کشش، ولی در این حالت برآیند این نیروها در امتداد قائم خنثی نشده و تعادل گره A تأمین نمی‌شود پس باید هر دو آنها صفر باشند تا هم تقارن رعایت شود و هم تعادل گره A

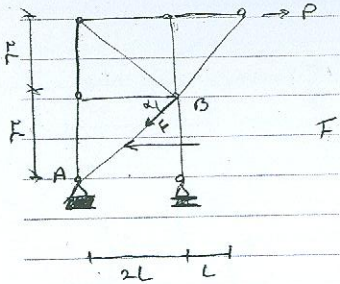
همین قضیه برای گره پایین هم برقرار است



$F_{AB} = ?$

$F_{AB} = \frac{P}{2}$

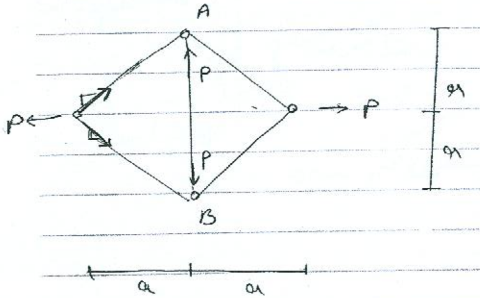
مثال) $F_{AB} = ?$



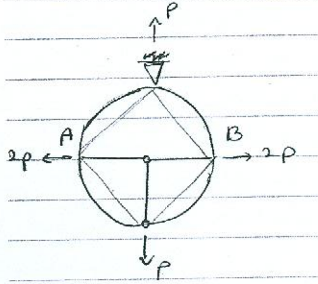
$F \cos\alpha = P$

$F_{AB} = \frac{P}{\cos\alpha}$

مثال)


A
B
P
P
P
P
a
a
a
a

$F_{AB} = P$



$F_{AB} = ?$

$F_{AB} = P$ کشش

دایره را با لوزی جایگزین می‌کنیم

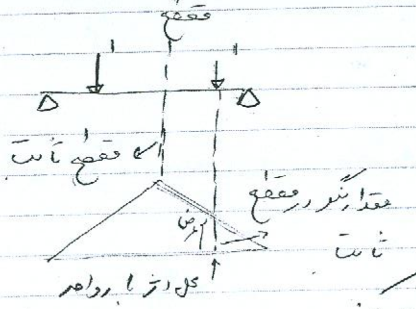
کشش $2P$

$-P$

$\overline{}$

P

خط تأثیر: منحنی خط تأثیر بیانگر تغییرات یک تابع مشخص در یک مقطع مشخص تحت اثر بار متحرک واحد بر روی سازه می باشد.


مقطع
مقطع ثابت
مقدار نیرو در مقطع ثابت
اثر ضی
کل اثر بار واحد

بار واحد روی تیر در حال حرکت است

مقطع ثابت

تابع ثابت V ، M ، P

دیاگرام نیرو به ازای بار، دیاگرام رسم می کنیم ←

تفاوت

- دیاگرام
  - مقطع متغیر
  - بار ثابت
- خط تأثیر
  - بار متحرک
  - مقطع ثابت

۱ـ مستقل از نوع بارگذاری

۲ـ در سازه معین خط مستقیم هستند

در سازه نامعین منحنی هستند (حداکثر درجه ۳)

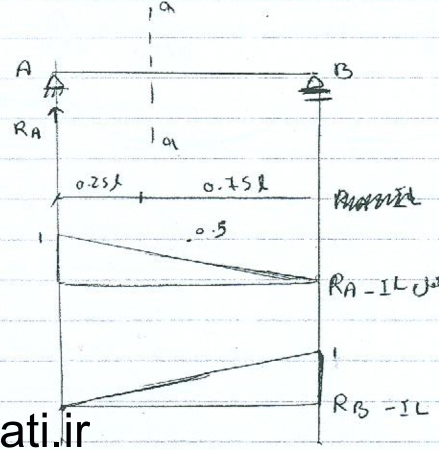
روش های ترسیم: ۱ـ نقطه یابی یا کمی

۲ـ ترسیمی (کیفی) ← اصل مولر

۱ـ روش کمی:

مثال: برای تیر دو سر مفصل از روش کمی، خط تأثیر رسم کنید

رسم خط تأثیر توابع: R_A ، R_B ، V_{a-a} ، M_{a-a}


a
A
B
R_A
a
0.25l
0.75l
1
0.5
R_A-IL
1
R_B-IL

۱ـ اگر بار واحد روی A باشد عکس العمل A برابر ۱ است

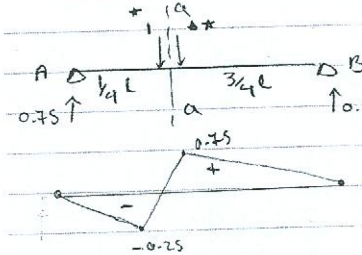
۲ـ اگر بار واحد وسط باشد عکس العمل A برابر 0.5 می باشد

در خط تأثیر عکس العمل های تکیه گاهی نکات زیر وجود دارد

۱ عرض خط تأثیر در نقطه ای که خط تأثیر آن را رسم می کنیم برابر با 1

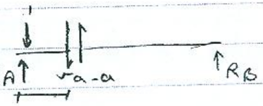
در سایر تکیه گاه ها برابر با صفر است

۲ جمع عرض های خط تأثیر عکس العمل های تکیه گاهی در هر وضعیت بارگذاری برابر با یک می شود



V_{a-a} - IL

ادامه حل :



بار روی تکیه گاه A ← برش در مقطع برابر صفر است

" " B "

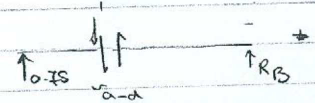
** *

در یک حالت بلافاصله قبل از مقطع و یکی بلافاصله بعد از مقطع

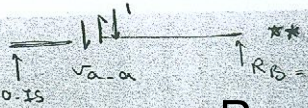
M_{a-a} - IL

در حالت * عکس العمل A برابر 0.75 می شود

پس برش برابر -0.25



$V_{a-a} = -0.25$

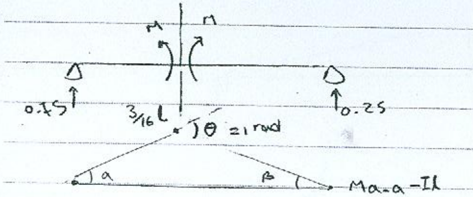


$V_{a-a} = 0.75$

در خط تأثیر نیروی برشی در مقطع دو نکته زیر وجود دارد :

۱ کل شکستگی ایجاد شده برابر با 1 می باشد

۲ شیب منحنی خط تأثیر در طرفین مقطعی که خط تأثیر را برای آن رسم می کنیم باید برابر هم باشد (بر اساس اصل پیوستگی)



M_{a-a} - IL

بار روی تکیه گاه A ← لنگر صفر است در تکیه گاه A

بار روی تکیه گاه B ← " " " B

لنگر مثبت چون تار پایین کشیده می شود

روش دوم برای بدست آوردن M : $\alpha + \beta = 1$

θ : دوران نسبی

$$\alpha = \frac{M}{0.25l} \qquad \beta = \frac{M}{0.75l}$$

$$\frac{M}{0.25} + \frac{M}{0.75l} = 1 \Rightarrow M = \frac{3}{16} l$$

۲ روش کیفی :

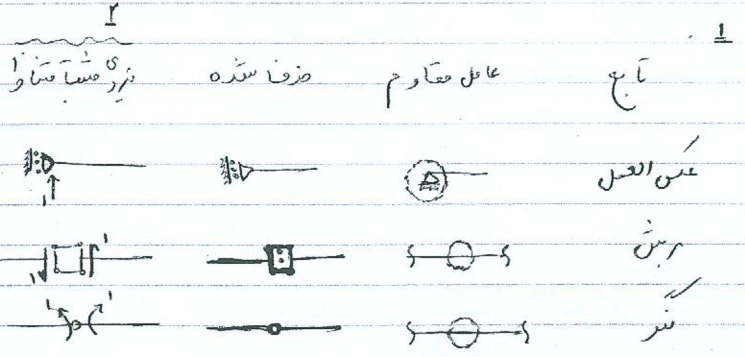
در رسم خط تاثیر به روش کیفی سه مرحله زیر را پیش رو داریم

۱ حذف عامل مقاوم در برابر حرکت ناشی از تابع مورد نظر

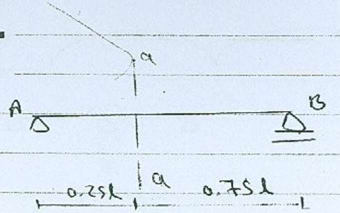
۲ اعمال نیروهای متناظر با تابع حذف شده در جهت مثبت

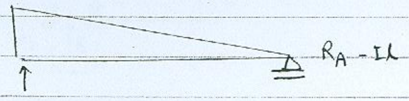
۳ رسم تغییر شکل سازه تحت اثر این نیروها

منحنی بدست آمده به طور مشابه شکل خط تاثیر تابع مورد نظر خواهد بود

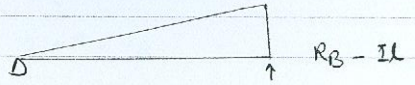

۱
تابع
عامل مقاوم
حذف شده
۲
نیروی متناظر
عکس العمل
برش
لنگر

مثال

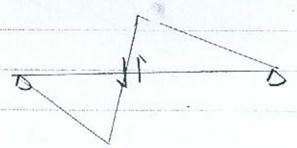

a
A
B
a
0.25l
0.75l

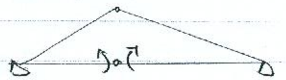


تکیه‌گاه A را برداشتیم و به جای آن نیرو گذاشتیم

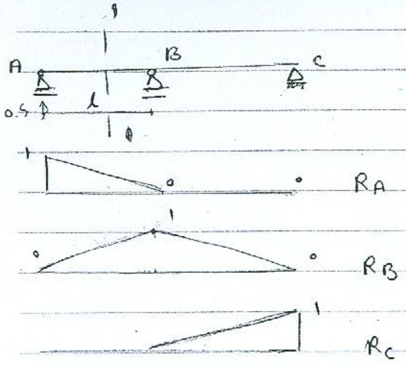


تکیه‌گاه B را حذف می‌کنیم و به جای آن نیرو می‌گذاریم





مثال ۱


A
B
C
1
1
l
0.5
1
0
0
RA
1
0
0
RB
1
RC

RA

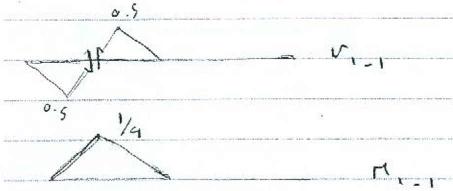
RB

RC

V_{1-1}

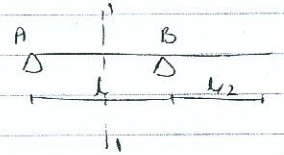
M_{1-1}

Rc را از جمع هم می توان بدست آورد


0.5
0.5
V_{1-1}
1/4
M_{1-1}

اگر بار در قطعه BC باشد در قطعه AB هیچگونه برش نداریم

مثال ۱



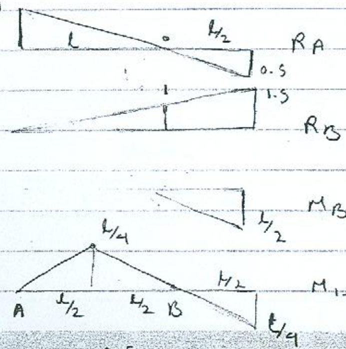
RA

RB

MB

M_{1-1}

V_{1-1}

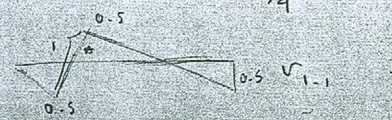

1
L
0
L/2
0.5
RA
1
1.5
RB
L/2
MB
L/4
L/2
A
L/2
L/2
B
L/4
M_{1-1}

VB — VBL / VBR

در تکیه گاه تغییر شکل نمی دهد بین دو قطعه
که در آن می چرخد

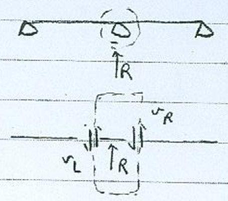
از سمت منفی صرف نظر می کنیم

یعنی اگر بار در AB حرکت کند هیچ اثری در B ایجاد نمی شود
چون مسیر آن آزاد است


0.5
1
0.5
0.5
V_{1-1}

بار که در گره بیاید MB مقدار پیدا می کند

* که حاوی L و مقطع ۱-۱ در وسط
بین 0.5 در بالا و 0.5 در پایین

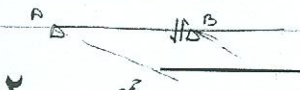


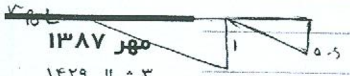
برش در طرفین المان با متمرکز با هم فرق می کند

$\Sigma F_y = 0$

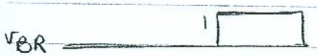
$V_L + R = V_R$

ادامه حل :





اگر در L برابر 1 باشد در L/2 برابر 0.5 می شود

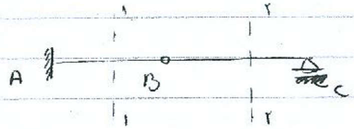


در بار در محدوده AB باشد هیچ برشی در گره ایجاد نمی شود
وقتی بار در گره می افتد تازه برش داریم

در رسم منحنی های خط تاثیر به این شیوه باید نکات زیر مد نظر قرار گیرد :

1 اگر در سازه های معین تغییر شکل به صورت منحنی باشد از آن صرف نظر نموده و در آن قطعه خط تاثیر را صفر فرض می کنیم

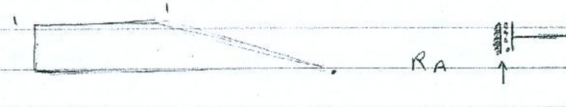
۲ اگر در رسم خطوط تاثیر نیز مفاصل ایجاد شده (مفاصل مجازی) بتوانند حرکت کنند (یعنی به گونه‌ای وصل باشند) با حرکت آنها در سازه معین تغییر شکل منحنی ایجاد کند از آن حرکت صرف‌نظر و تغییر شکل و منحنی‌ها و مفصل را تحت اثر نیروی اعمال شده بدست می‌آوریم



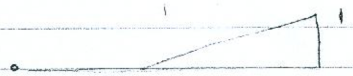
مثال) R_A , R_C , M_A , V_B

M_{1-1} , V_{1-1}

M_{2-2} , V_{2-2}

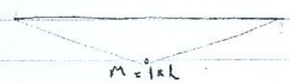


در تکیه‌گاه گیردار، قید قائم آن حذف می‌شود

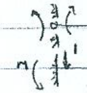


باز هم دوران آزاد نمی‌شود بنابراین فقط صاف بالا می‌رود

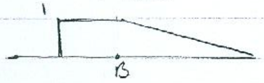
از روی [illegible] هم می‌توان می‌زد



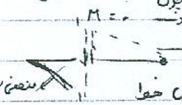
MA



چون به عضو چسبیده می‌روند عضوها در راستا هم می‌گیرند



V_{1-1}

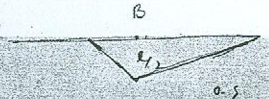


منحنی بی حذف می‌شود

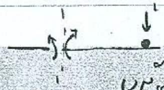
چون $M = 0 \rightarrow 1 \times 0 = 0$

چون بار برابر آن

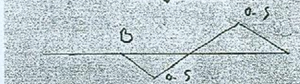
باز خط چپ موازی با [illegible] خط صاف درنظر می‌گیریم



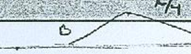
M_{1-1}



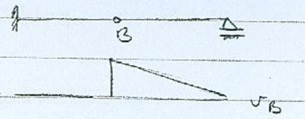
تغییر شکل منحنی در سمت چپ بی حذف می‌شود (بار در مفصل قرار می‌گیرد)



V_{2-2}



ادامه :



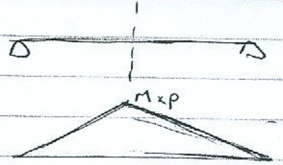
شکل سمت چپ منحنی می‌شود

صرف‌نظر می‌کنیم

ملاحظات تاثیری به سمت چپ نداشت

در برش می‌تواند متفاوت باشد در مفصل است V_B

محاسبه مقادیر توابع به ازای بارهای غیر از بار واحد :



بار P

بار گسترده مجموعه‌ای از بارهای متمرکز است

چندتا بار متمرکز، عرض خط تاثیر را زیر هر یک بدست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم

بار گسترده ← شدت بار × سطح زیر

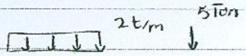
منحنی‌های خط تاثیر به ازای بار متمرکز واحد رسم می‌شوند اگر بارگذاری روی تیر غیر از آن باشد برای محاسبه تابع مورد نظر به شیوه زیر عمل می‌کنیم

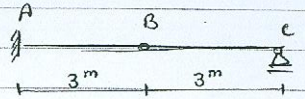
الف) اگر بار متمرکزی با مقداری غیر از واحد به سازه اعمال شود عرض خط تأثیر را در مقطع مورد نظر در مقدار آن بار ضرب می‌کنیم

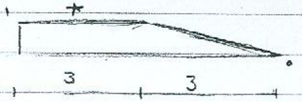
ب) اگر مجموعه‌ای از بارهای متمرکز به سازه اعمال شود برای محاسبه مقدار تابع هر یک از بارها را در عرض خط تأثیر متناظر با خودش ضرب کرده و حاصل آنها را با یکدیگر جمع می‌کنیم

ج) اگر بار گسترده به سازه اعمال شود (با شدت یکنواخت) برای محاسبه تابع سطح زیر خط تأثیر را در محدوده‌ای که بار گسترده اعمال می‌شود در شدت آن بار ضرب می‌کنیم (علامتهای جبری را توجه داشته باشیم)

مثال) اگر بار متمرکز ۵ تن به علاوه بار گسترده‌ای به شدت 2ton/m و به طول محدود 3m از روی تیر شکل زیر عبور کند بحرانی‌ترین مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه A چقدر خواهد بود







از خط تأثیر استفاده می‌کنیم

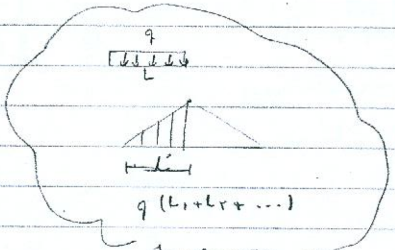
در نقطه ★ اعمال می‌شود

اثر متمرکز → $R_A = 5 * 1 = 5$

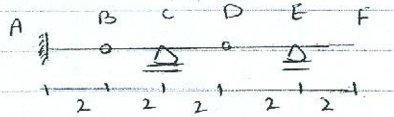
اثر گسترده → $R_A = \underbrace{S}_{3\times1} \times \underbrace{q}_{2} \rightarrow R_A = 6$

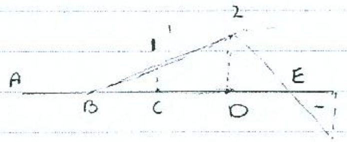
در نقطه ★ اعمال می‌شود

$+ R_A = 11$



A28 * مثال) در تیر شکل زیر اگر بار یکنواختی به شدت w از روی آن عبور کند حداکثر عکس العمل تکیه گاه C چقدر خواهد شد



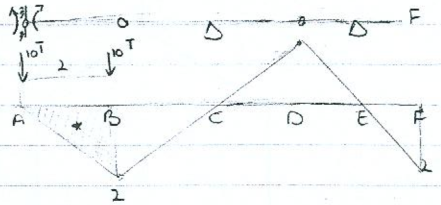


اثر گسترده ⟶ $R_C = S \times q$

در محدوده B تا E

$$R_C = \left(\frac{6\times 2}{2}\right) \times w = 6w$$

در مثال فوق اگر دو بار متمرکز 10Ton به فاصله ثابت 2 متر از یکدیگر از روی تیر عبور کنند حداکثر لنگر تکیه گاه A چقدر خواهد شد



اثر بار متمرکز ⟶ $10\times 0 + 10\times 2 = 20\ t/m$

اگر یک بار گسترده به شدت $2t/m$ و طول ثابت 6 متر از روی این تیر حرکت کند حداکثر لنگر ایجاد شده در تکیه گاه A چقدر می شود

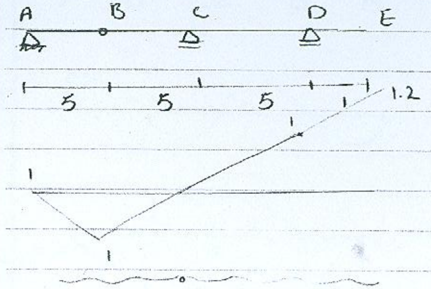
* مساحت

$$M = \underbrace{\frac{2\times 2}{2}}_{\text{مساحت}} \times \underbrace{2}_{\text{شدت}} = 4$$

فقط در قسمت اول باقی می ماند چون بقیه

[illegible] صفری از بین می رود

A283 مثال) اگر بار گسترده ای به شدت 1Ton/m و به طول نامحدود از روی تیر زیر عبور کند تکیه گاه D برای چه عکس العملی طراحی می شود



$R_D = 5 \times 1\ Ton/m = 5$

$S = -5$ $S = +3.6$

$S = \frac{10\times 1}{2}$ $S = \frac{6\times 1.2}{2}$

مثال ۱۱) در خرپای شکل زیر

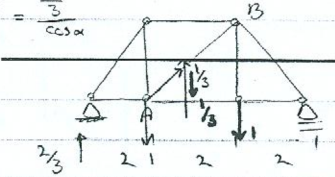
روز جهانی پست

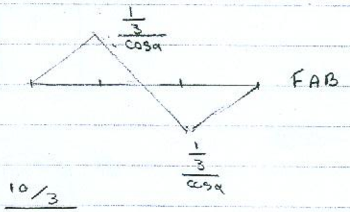
بار متمرکز 10 Ton روی پل

کتابی حرکت کند حداکثر نیروی

عضو AB چقدر خواهد شد

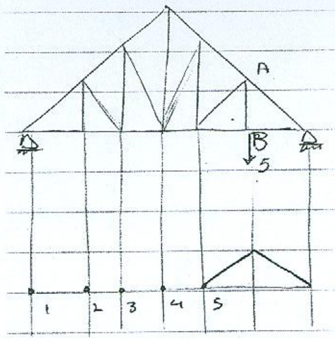
$F = \frac{\frac{1}{3}}{\cos\alpha}$





$$R_{AB} = \frac{\frac{1}{3}}{\cos\alpha} \times 10 = \frac{10/3}{\cos\alpha}$$

* در خرپا ها نیرو ها فقط به گره ها اعمال می شود *

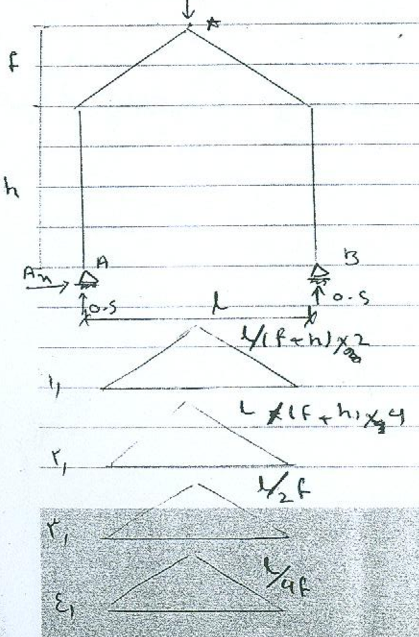


اگر بار متمرکز 10Ton که روی پل خرپایی
این خرپا حرکت کند خط تأثیر نیروی
محوری عضو AB را رسم کنید

دو عضو دیگر راست عضو صفر صفر است
فقط در حالتی که بار روی B می باشد

نیرو در هر یک از 1 و 2 و 3 باید چون صفر نیرویی است صفر می شود مگر از اینکه در B وارد شود
که دیگر صفر نیست

خط تأثیر عکس العمل افقی A جایی که بار واحد به صورت قائم روی سقف این سازه
حرکت کند

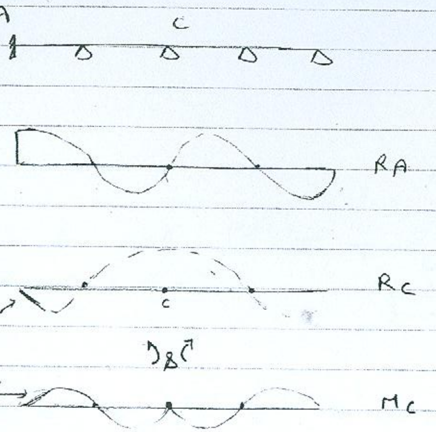


$$0.5 \times l/2 = A \times (h+f)$$

$$\to A = \frac{l}{4(h+f)}$$

حول نقطه * لنگر می گیریم

سازه‌های نامعین :

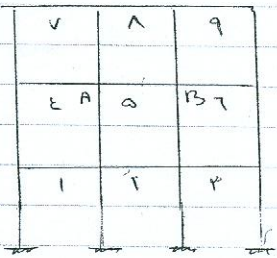


خط تأثیر

در پایین منفی

پایین منفی

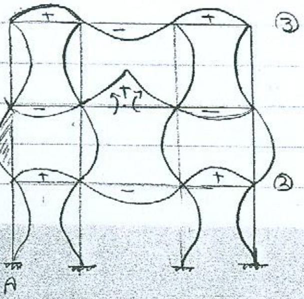
بیشترین لنگر منفی c در دهانه های ۲ و ۳ می باشد



بار گسترده زنده در کدام دهانه ها اعمال شود
که لنگر مثبت دهانه AB ماکزیمم شود

زاویه تیر و ستون بعد از دوران نیز باید 90 باشد

بعد از کشیدن تغییر شکل تیر سراغ ستون Ⓐ
می رویم در طبقه ۲ *



* شرط ۲
* عمود به حالت
که قابها شود
اینگونه
8
می آید

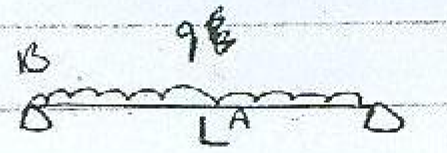
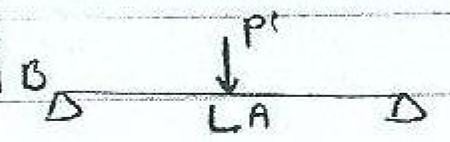
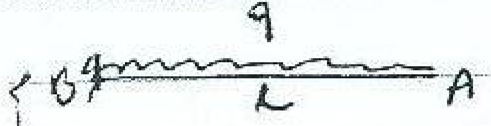
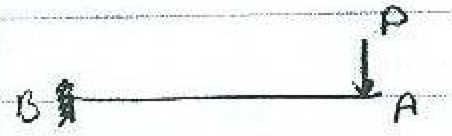
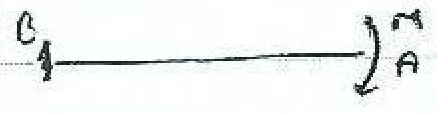
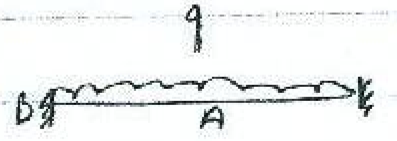
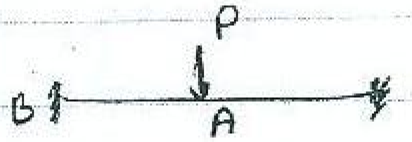
اول تغییر شکل ستونها بعد تیرهای 3 و 2 که همواره
مثل شکل می تیرها در دهانه‌های وسط ⊕ و ⊖ داریم

* خاصیت قاب‌های خمشی این است که تغییر شکل یک نقطه در
همه جا مؤثر است

شیب تغییر مکان در مقطع A

تیرهای معین

مثال ۱)

		ΔA	θA	θ
دو سر ساده		$\frac{5}{384}\cdot\frac{qL^4}{EI}$	0	$\overset{B}{\frac{1}{24}}\cdot\frac{qL^3}{EI}$
		$\frac{1}{48}\cdot\frac{PL^3}{EI}$	0	$\frac{1}{16}\cdot\frac{PL^2}{EI}$
طره		$\frac{1}{8}\cdot\frac{qL^4}{EI}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{qL^3}{EI}$	0
		$\frac{1}{3}\cdot\frac{PL^3}{EI}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{PL^2}{EI}$	0
		$\frac{1}{2}\cdot\frac{ML^2}{EI}$	$\frac{ML}{EI}$	0
دو سر گیردار		$\frac{1}{384}\cdot\frac{qL^4}{EI}$	0	0
		$\frac{1}{192}\cdot\frac{PL^3}{EI}$	0	0

چند نکته برای حفظ کردن جدول بالا

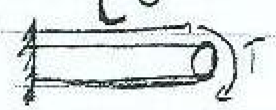
در حالتی که بار گسترده داریم $\frac{qL^4}{EI}$ را ثابت داریم
در حالتی که بار متمرکز داریم $\frac{PL^3}{EI}$ را ثابت داریم
در حالتی که M داریم $\frac{ML^2}{EI}$ را ثابت داریم

برای Δ ، برای θ یکی از توان L ها کم می‌شود

تغییر شکل ۲)
- خمشی ← مورد بحث امتحان
- برشی — از روش‌های انرژی و کار، مستقیم و مجازی حل می‌شود
- محوری

دوران
- خمشی ← مورد بحث امتحان
- پیچشی

$G = 0.4E$ ← حدوداً برای فولاد — $\varphi = \frac{T\cdot L}{G\cdot J}$ ⟶



$J = \frac{\pi}{2}r^4$ ← برای مقطع دایره

برای محاسبه تغییر شکل و دوران‌ها، روش‌های مختلفی داریم
- هندسی ← تیر مزدوج
- انرژی ← کاستیلیانو
- ترسیمی ← منحنی الاستیک
- ابتکاری

روش تیر مزدوج یا بار الاستیک :

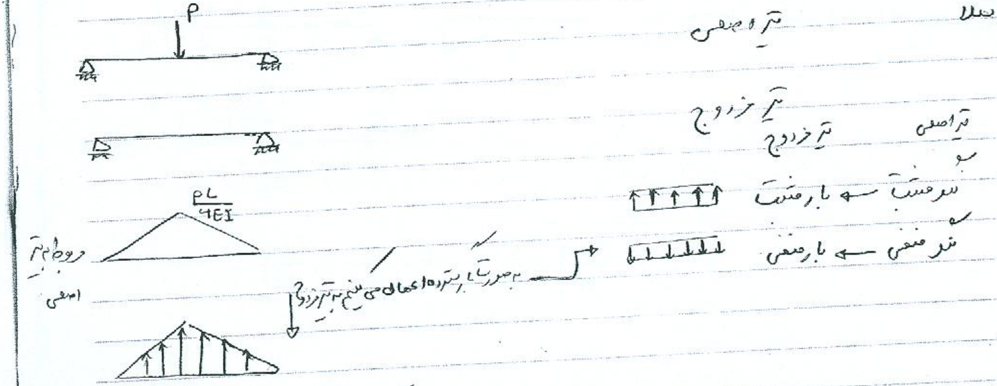
1. ابتدا دیاگرام لنگر تیر موجود را رسم می‌کنیم

2. دیاگرام لنگر را در هر نقطه بر صلبیت خمشی (EI) آن نقطه تقسیم می‌کنیم

3. منحنی بدست آمده را مثلا ($\frac{M}{EI}$) به صورت بار گسترده به تیر مزدوج، تیر اصلی اعمال می‌کنیم

در این سازه برش در هر مقطع θ در تیر اصلی و لنگر در هر مقطع Δ در تیر اصلی خواهد بود

مثلا :


P
تیر اصلی
تیر مزدوج
$\frac{PL}{4EI}$
در وسط تیر اصلی
به صورت بار گسترده اعمال می‌کنیم به تیر مزدوج

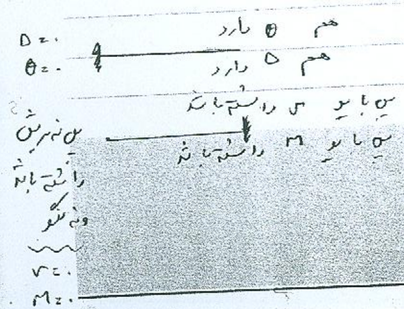
تیر اصلی — تیر مزدوج

لنگر مثبت ← بار مثبت

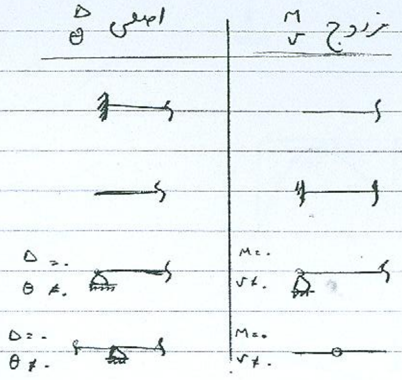
لنگر منفی ← بار منفی

توصیه : روش تیر مزدوج را فقط برای بارهای متمرکز استفاده می‌کنیم

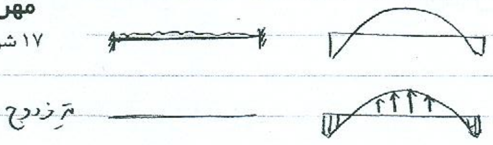
مثلا :


Δ=0
θ=0
هم θ دارد
هم Δ دارد
نه باید M داشته باشد
نه باید V داشته باشد
نه برش داشته باشد و نه لنگر
V=0
M=0

تغییر شرایط تکیه‌گاهی در روش مزدوج


اصلی Δ θ
مزدوج M V
Δ=0
θ≠0
M=0
V≠0
Δ=0
θ≠0
M=0
V≠0

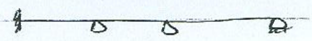
مثال



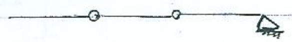
مزدوج تیرهای نامعین
ناپایدار می‌شود

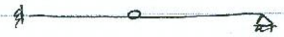
تیرهای ناپایدار پایدار می‌شود

مثال ۱

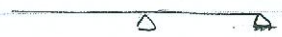


تیر مزدوج

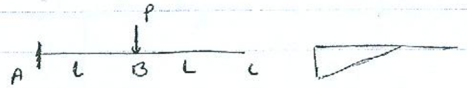




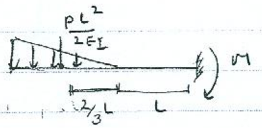
تیر مزدوج



مثال) تغییر مکان انتهای گره را بدست آورید

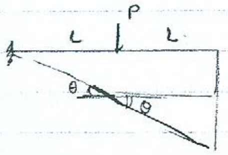


تیر مزدوج



$$M = \frac{PL^2}{2EI} \cdot \frac{5}{3} \cdot L = \frac{5}{6} \frac{PL^3}{EI}$$

روش اشعاری



$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta' = \theta \cdot L$$

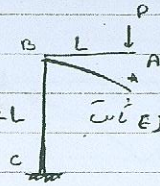
$$\frac{PL^2}{2EI} \times L = \frac{PL^3}{2EI}$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \frac{PL^3}{EI}$$

$$\frac{5}{6} PL^3/EI$$

★ مثال ۱

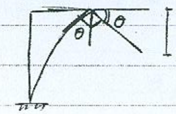
روش اشعاری



Δ_A قائم $= ?$

$$\Delta_1 = \frac{PL^3}{3EI}$$

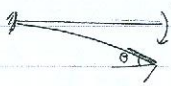
★ اول فرض می‌کنیم ستون سخت



$$\Delta_2 = \theta \cdot L$$

حالا فرض می‌کنیم بالا در نقطه A ثابت است

شکل را ۹۰° می‌چرخانیم



$$M = P \cdot L$$

$$\theta = \frac{M \times L}{EI} = \frac{2PL^2}{EI} \qquad \Delta = \theta \cdot L$$

$$\Delta = \frac{2PL^3}{EI}$$

$\Delta = \frac{7}{3} \times \frac{PL^2}{EI} \leftarrow \Delta_2 , \Delta_1$ ج

$\Delta_{\text{کل}} = \Delta_{\text{تیر}} + \Delta_{\text{ستون}}$

روش تیر مزدوج برای قاب‌ها سخت است

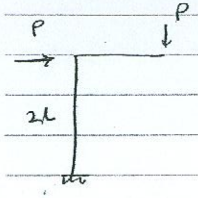
↓

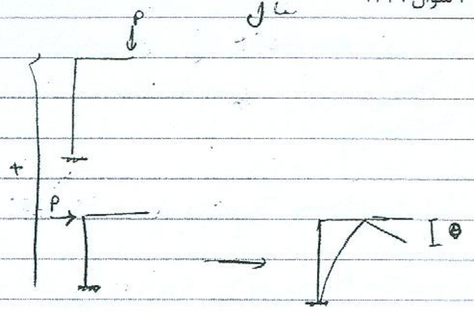
سهم عمده تغییر مکان در قاب‌ها مربوط به تغییر مکان ستون‌ها می‌باشد

↓

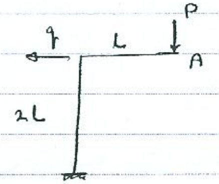
سخت کردن ستون اثر بیشتری دارد ← برای کنترل تغییر

مثال



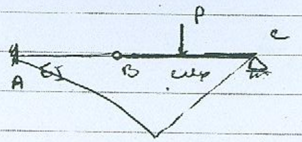


مثال ۱ $\frac{P}{q}$ چقدر باشد تا Δ_A قائم برابر صفر باشد



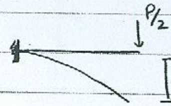
$\frac{P}{q} = ?$

مثال ۱



$\begin{cases} \Delta_B \\ \theta_c \end{cases}$

۲/ از روش ترکیب حل کنیم



$$\Delta = \frac{\frac{P}{2} \times L^3}{3EI} = \frac{PL^3}{6EI}$$

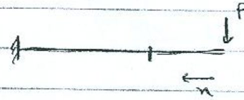
چون تکه BC صلب است پس سختی بینهایت است دیگر تکه BC صفر می‌شود

$$\theta_c = \frac{\Delta}{L} = \frac{PL^2}{6EI}$$

روش ۱/ کاستیلیانو :

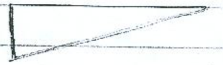
$$U = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

انرژی ذخیره شده خمشی



$M(x) = P \times x$

$$U = \int_0^L \frac{(P \times x)^2 \cdot dx}{2EI} = \frac{P^2L^3}{6EI}$$



روش ۱/ کار حقیقی

$$\boxed{\frac{P^2L^3}{6EI} = \frac{1}{2}P\,\Delta \Rightarrow \Delta = \frac{PL^3}{3EI}}$$

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial P}$$

$$U = \int \frac{M^2\,dx}{EI} \longrightarrow \boxed{\Delta_A = \int \frac{M^*}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot dx}$$

مشتق می‌گیریم

- در نقطه مورد نظر
- در راستای مورد نظر

$$\boxed{\theta_A = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial m} \cdot dx}$$

در روش کاستیلیانو برای محاسبه تغییرمکان یا دوران در هر نقطه به شرح زیر عمل می‌کنیم

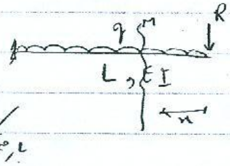
۱- برای محاسبه تغییرمکان نیروی متمرکزی در نقطه موردنظر و در راستای موردنیاز به سازه اعمال می‌نماییم (اگر این نیرو از ابتدا وجود نداشته باشد مقدار آن را صفر درنظر می‌گیریم)

۲- در محاسبه دوران یک لنگر متمرکز در نقطه موردنظر اعمال می‌کنیم

۳- انرژی خمشی را محاسبه و از آن نسبت به نیرو یا لنگر اعمال شده مشتق می‌گیریم

می‌توانیم به جای مشتق‌گیری از انرژی از همان استدلال رابطه * استفاده نماییم

مثال ۱ تغییرمکان و دوران انتهای طره را با روش کاستیلیانو به دست آورید



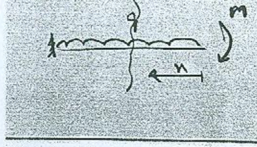
در کاستیلیانو اگر منفی شد یعنی تغییرمکان خلاف جهت بار است که گذاشتیم

بار متمرکز در انتها
تا آخر اعمال می‌کنیم

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} - Rx$$

$$\frac{\partial M}{\partial R} = -x \xrightarrow[\text{صفر قرار می‌دهیم}]{R\ \text{را}} \Delta_A = \int_0^L \frac{-qx^2/2}{EI} \times (-x) \cdot dx$$

$$\Delta_A = \frac{qx^4}{8EI} \longrightarrow \Delta_A = \frac{qL^4}{8EI}$$



$$M(x) = -m - \frac{q \times x^2}{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = -1 \xrightarrow[\text{صفر}]{m\ \text{را برابر}} \theta_A = \int_0^L \frac{-\frac{qx^2}{2}}{EI} \times (-1) \times dx$$

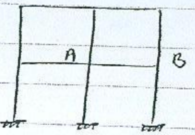
$$\theta_A = \frac{qx^3}{6EI} \longrightarrow \theta_A = \frac{qL^3}{6EI}$$

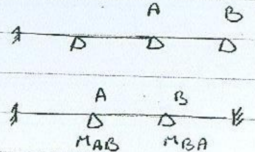
دوران هم هم‌جهت [illegible]

روش شیب و افت: نامعین
نیرو
تغییرشکل

↓

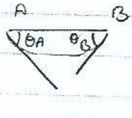
فقط سازه‌های نامعین



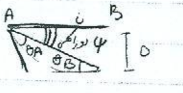


MAB
← انتهای نزدیک عضو
← انتهای دور عضو

اثر شیب‌ها: دوران انتهاهای نزدیک و دور



MAB در انتهای عضو =
- دوران انتهای دور و نزدیک
- دوران طی عضو (نسبی)
- بارگذاری

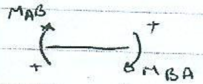


Δ

$$\psi = \frac{\Delta}{L}$$

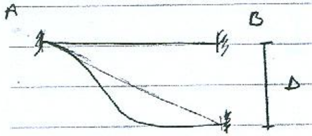
$$M_{AB} = \underbrace{\frac{2EI}{L}}\Big(\underbrace{2\theta_A}_{\text{انتهای نزدیک}} + \underbrace{\theta_B}_{\text{انتهای دور}} - \underbrace{3\psi}_{\text{کل}}\Big) + \underbrace{FEM_{AB}}_{\text{بار}}$$

قرارداد علامت: مطلق دوران‌ها در جهت عقربه‌های ساعت مثبت فرض می‌شوند



لنگر متمرکز در انتهای عضو ساعتگرد همیشه مثبت است

مثال: در یک تیر دو سر گیردار که هیچ بار خارجی بر آن اثر نمی‌کند یکی از تکیه‌گاه‌ها به اندازه Δ نشست می‌کند لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه مقابل آن چقدر خواهد بود



$\theta_A = 0$

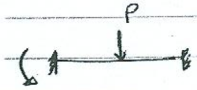
$\theta_B = 0$

بارگذاری نداریم

$\psi = +\frac{\Delta}{L}$, $FEM = 0$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(0 + 0 - \frac{3\Delta}{L}\right) + 0$$

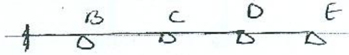
$$M_{AB} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$



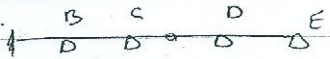
این تیر دوران و نشست ندارد

و فقط اثر بار دارد ← در اثر بارگذاری که ایجاد می‌شود برابر FEM است

چند تا مجهول سختی داریم؟ ۵ تا مجهول θ دارد



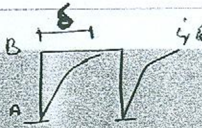
۷ تا مجهول θ دارد

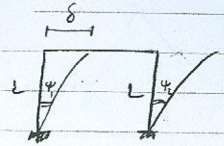


مجهولات
- دورانی θ تکیه‌گاه‌ها یا گره‌ها در آن مفصل داشته باشیم سوای مفصل
- انتقالی Δ
  - تیر ← ناشی از نشست
  - قاب ← تغییر مکان

درجات آزادی

D.O.F

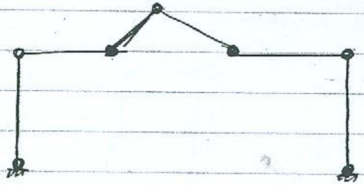




درجات آزادی انتقالی در قاب‌ها:

$\psi_1 = \psi_2$

تعداد مجهولات مستقل را باید بشماریم



دو روش
1. تعداد قیدهایی که لازم است بگذاریم تا پایدار شود یعنی حرکات جانبی مقید شود
2. یا باید ببینیم چند تا مجهول کم داریم ← همه را مفصل می‌کنیم

این روش همه جا جواب نمی‌دهد

مجهول = ۶

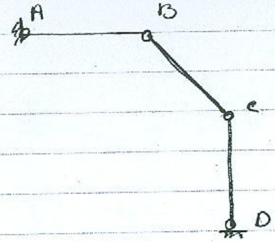
معادله = 3 + 5 = 8

۶ مجهول کم ← ۶ تا ۳ مستقل

تعداد قیدهای که کم داریم

برای محاسبه درجات آزادی انتقالی مستقل از هم در قاب‌ها باید تعداد قیدهای که به سازه اضافه می‌شود تا تغییر مکان‌های ایجاد شده در المان را مقید کند بشماریم

می‌توان برای محاسبه تعداد آنها تمام اتصالات اعم از تکیه‌گاه‌ها را مفصلی کرد و سپس تعداد مجهولات لازم را برای برابری معادلات با مجهولات شمارد که این تعداد همان درجات آزادی انتقالی خواهد بود



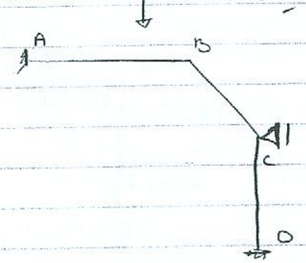
دورانی θ_B θ_C

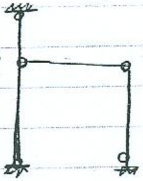
انتقالی

۴ مجهول

معادله $3 + 2 = 5$

$1 \leftarrow$ ۱ قید می‌خواهد $\leftarrow$





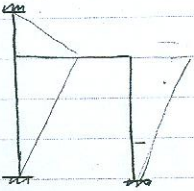
روش ۲ X

6 مجهول

دورانی θ_B , θ_C

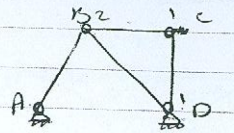
$$\frac{3 + 3}{۰}$$

مثال مهم



روش ۱ X

۱ انتقالی



دورانی : θ_A , θ_B , θ_C , θ_D

درعضو مفصل شده

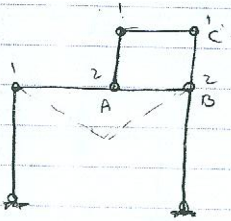
دورانی : 5

انتقالی : ندارد

کاربسته

مجهول $4 + 3 = 7$

معادله $3 + 4 = 7$



دورانی ۵

کاربسته ۰

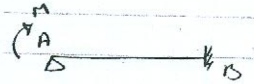
مجهول : $4 + 3 = 7$

معادله : $3 + 7 = 10$

انتقالی 3

برای مقید شدن در نقاط A و B و C تکیه‌گاه می‌خواهد

مثال) اگر لنگر M به انتهای A اعمال شود دوران تکیه‌گاه A و لنگر تکیه‌گاه B را محاسبه کنید



$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + 0 - 0) + 0 = M$$

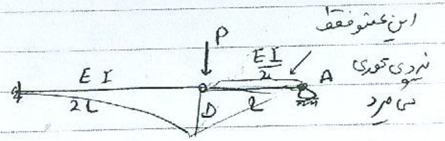
$$M_{AB} = \frac{4EI}{L}\theta_A \rightarrow \theta_A = \frac{ML}{4EI} \rightarrow \underset{\text{دورانی}}{K} = \frac{M}{\theta} = \frac{4EI}{L}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(0 + \theta_A - 0)$$

$$= \frac{2EI}{L}(ML/4EI) = \frac{M}{2}$$

از این موضوع نتیجه می‌شود اگر لنگری به گره‌ای وارد شود به نسبت سفتی دورانی آنها بین اعضا پخش می‌شود

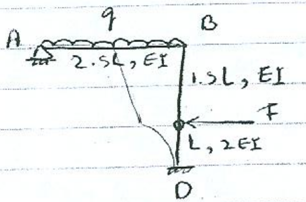
مثال ۱: چرخش نقطه A چقدر است؟


P
EI
$\frac{EI}{2}$
A
2L
D
L
این عضو فقط
نیروی محوری
می‌گیرد

$$\Delta = \frac{P(2L)^3}{3EI} = \frac{8PL^3}{3EI}$$

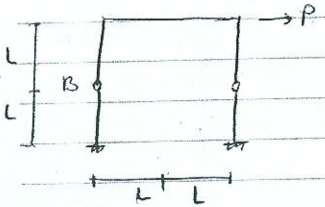
$$\theta_A = \frac{\Delta}{L} = \frac{8PL^2}{3EI}$$

تغییر مکان افقی نقطه C چقدر است


q
A
B
2.5L, EI
1.5L, EI
F
L, 2EI
D

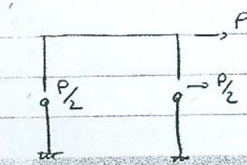
$$\Delta_C = \frac{FL^3}{3(2EI)}$$

تغییر مکان افقی نقطه B چقدر است

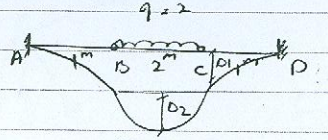


$$\Delta_B = \left(\frac{P}{2} L^3\right) / 3EI$$

ثابت EI

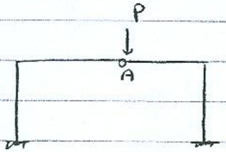


Δ وسط عضو BC

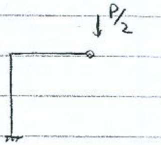

q = 2
A
1m
B
2m
C
1m
D
Δ1
Δ2

$$\Delta_1 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{2 \times 1^3}{3EI} = \frac{2}{3EI}$$

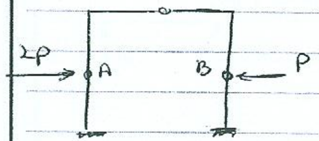
$$\Delta_2 = \frac{5}{384} \times \frac{2 \times 2^4}{EI} = \frac{160}{384EI}$$



تغییر مکان قائم نقطه A

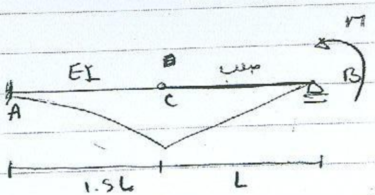


مثل سوال ۴ حل می‌شود

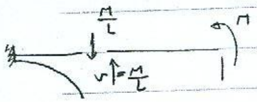


دو نقطه A و B چقدر به هم نزدیک می‌شوند

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} \times \frac{PL^3}{EI} \\ \frac{2}{3} \times \frac{PL^3}{EI} \end{array}\right\} + \longrightarrow \frac{PL^3}{EI}$$

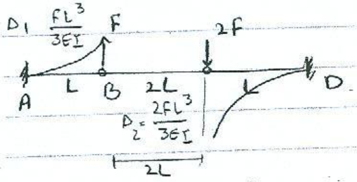


در سازه شکل زیر مقدار چرخش در نقطه B چقدر است



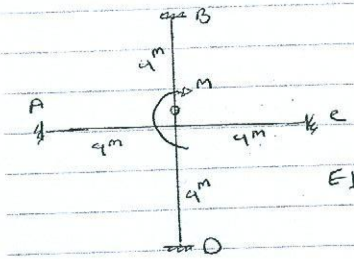
$$D = \frac{(\frac{M}{L})(1.5L)^3}{3EI} = \frac{9ML^2}{8EI}$$

$$\theta_B = \frac{9ML}{8EI}$$



مقدار چرخش عضو BC را حساب کنید

$$D_1 + D_2 = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{2FL^3}{3EI} = \frac{FL^3}{EI} \xrightarrow[2L]{\text{تقسیم}} \frac{D}{2L} = \frac{\frac{FL^3}{EI}}{2L} = \frac{FL^2}{2EI}$$



نیرو تکیه‌گاه D چقدر است

EI = cte

مفصل می‌گذارد دوران به نقطه B برسد

سختی‌ها یکی است ← $\frac{M}{3}$

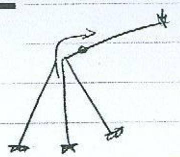
تکیه‌گاه دور نصف می‌برد ← $\frac{M}{6}$

$M_{DA} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + 0 - 0) + 0$

$M_{DA} = \frac{4EI}{L}\theta_A \rightarrow K_{\text{دورانی}} = \frac{m}{\theta} \rightarrow K_{\text{دورانی}} = \frac{\frac{4EI}{L}\theta_A}{\theta} \rightarrow K_{\text{دورانی}} = \frac{4EI}{L}$

نیروی ایجاد شده در هر بار به نسبت سختی دورانی بین اعضای متصل به آن گره تقسیم شود سختی دورانی هر عضو $\frac{4EI}{L}$ می‌باشد که در این سازه برای هر ۳ عضو یکسان است از آنجایی عضو بالایی به دلیل وجود مفصل هیچ سهمی از نیرو نمی‌برد پس سهم هر عضو $\frac{M}{3}$ خواهد بود و نیرو منتقل شده به دور نصف نیروی ایجاد شده در گره است پس نیرو تکیه‌گاه D برابر M/6 خواهد بود

$M_D = M/6$



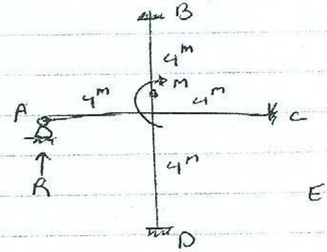
الحاق ۲

زوایای دوار گیری هیچ ربطی ندارد و

مثل مثال قبل حل می‌شود

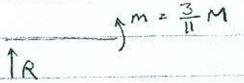
از انتهای دور مفصل باشد سختی $\frac{3}{4}$ می‌شود

اشکال ۵ اگر تکیه‌گاه اعضا به جای گیردار مفصلی باشد سختی دورانی عضو در $\frac{3}{4}$ ضرب می‌شود یعنی $\frac{3EI}{L}$ می‌شود



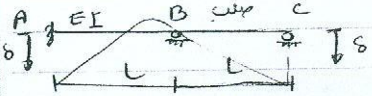
مثال عکس العمل قائم تکیه‌گاه A چقدر است

EI = cte $\quad \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} + \frac{3EI}{L} = \frac{11EI}{L}$



$R \times 4 = \frac{3}{11}M$ $\qquad \frac{K}{\Sigma K}$

$R = \frac{3}{44}M$



مثال اگر تکیه‌گاه A در اثر نشست δ

لنگر ایجاد شده در A و C چقدر است

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(0 + \theta_B + 3\psi_{AB})$$

$$\psi_{AB} = -\frac{\delta}{L} \qquad \theta_B = \frac{\delta}{L}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(0 + \frac{\delta}{L} + 3 \times -\frac{\delta}{L}\right)$$

$$M_{AB} = \frac{8EI\delta}{L^2}$$